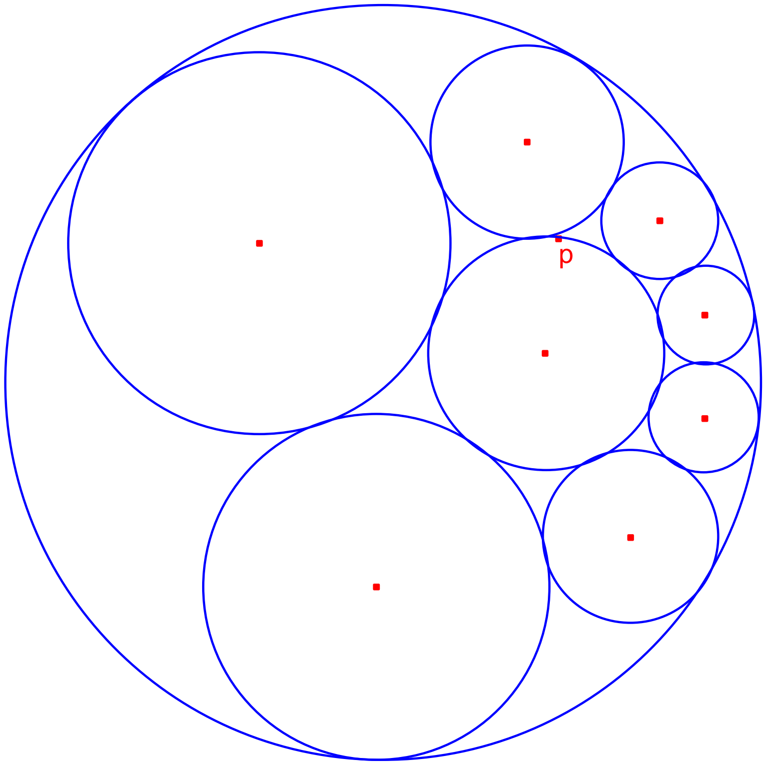
Inversão Geométrica

Um enfoque computacional



Introdução

O presente trabalho foi motivado pela bela figura anterior, uma seqüência de sete circunferências preenchendo estrategicamente o espaço compreendido entre outras duas, de centro e raios conhecidos e não concêntricas. Essa seqüência recebe o nome de ***Cadeia de Steiner*** (1976 – 1863)

O problema proposto carece de uma redução a um problema menos complexo, que as duas circunferências sejam concêntricas.

A solução apresentada para o problema principal requer a utilização de uma ferramenta poderosa – a teoria das inversões circulares.

Para visualização será utilizado o software de geometria dinâmica – Cabri Geometre II, que tem como uma de suas ferramentas o recurso de inversão geométrica, mas que também pode ser feito um macro com o mesmo recurso.

Todas as demonstrações podem ser feitas com o uso do software livre GeoGebra, que produz os mesmos resultados e ainda conta com a ferramenta Java, para disponibilizar arquivos na web.

Fatos Históricos

Contribuições para o estudo da teoria da inversão geométrica:

Mhor (1640 - 1697) – publicou *Euclides danicus* – toda construção ponto a ponto pode ser construída com régua e compasso, pode ser construída apenas com compasso.

Mascheroni(1750 - 1800) – publicou *Geometria del compasso* – todas as construções euclidianas podiam ser feita apenas com compasso.

Jacob Steiner (1976 – 1863) – *aprendeu a ler depois dos 14 anos e só foi para a escola após aos 18 anos contra a vontade dos pais.*Considerado o maior geômetra sintético dos tempos modernos.Detestava métodos analíticos.

Provou que todas as construções euclidianas podem ser feitas usando só a régua, desde que seja dado um único círculo fixo.

Inversão no plano

Fundamentação Teórica

O tópico de transformações geométricas revela um domínio extremamente relevante no estudo moderno de geometria.

Uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano E em um novo ponto de E.

Transformações mais conhecidas:

Translação

Reflexão

Simetria

Rotações

Semelhanças - Homotetia

Inversões

Notação

Toda nossa ação se passa em um plano fixo E.

Pontos e retas serão denominados, respectivamente, por letras maiúsculas *A,B,C,...* e minúsculas *r,s,t*,...

A circunferência de centro O e raio r, será denominada de C(O,r).

Teorema de Mohr- Mascheroni

Todo ponto do plano obtido através de uma construção euclidiana pode ser obtido por uma construção utilizando apenas o compasso.

As construções geométricas realizadas com o compasso apenas, segundo o método de Mohr-Mascheroni, têm notável relevância teórica para a geometria.

Existe, entretanto, um outro método, mais simples, para realizar construções geométricas usando apenas o compasso. É o objeto de estudo desse trabalho, a inversão de pontos, que será abordado na seqüência.

Definição: *Dada uma circunferência C(O,r), a transformação geométrica que leva um ponto P ao ponto P' tal que:*

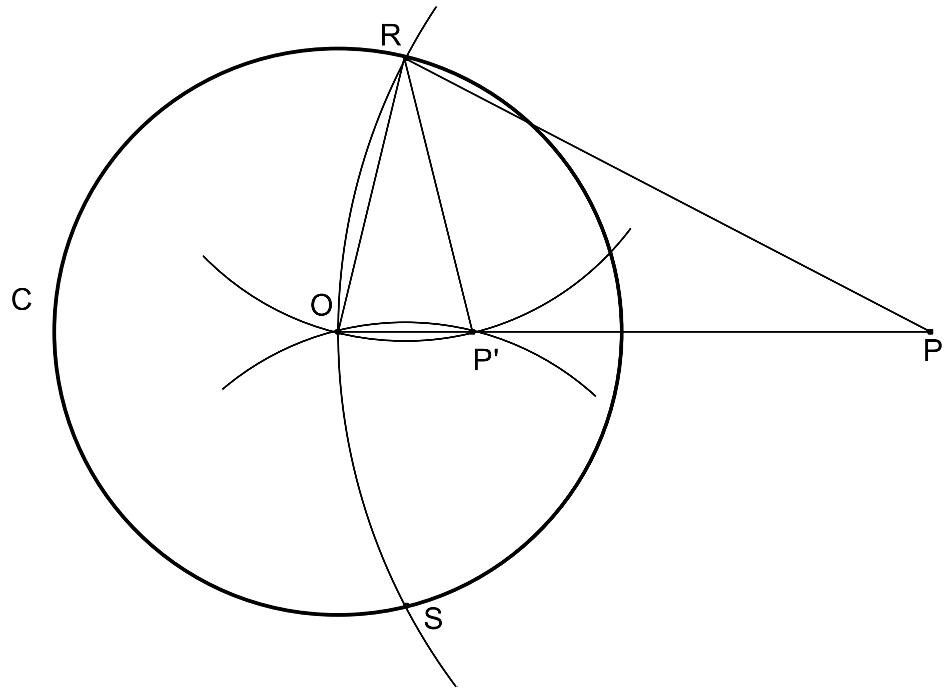
$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = \left(\overline{OC}\right)^2 = r^2$$

Chama-se inversão de centro O e raio r (ou um inversão referente a circunferência C).

Construção geométrica de pontos inversos:Teorema de Mohr-Mascheroni

Vamos utilizar o teorema de Mohr-Mascheroni para mostrar a definição acima utilizando apenas o compasso.

Construção geométrica de pontos inversos:Teorema de Mohr-Mascheroni

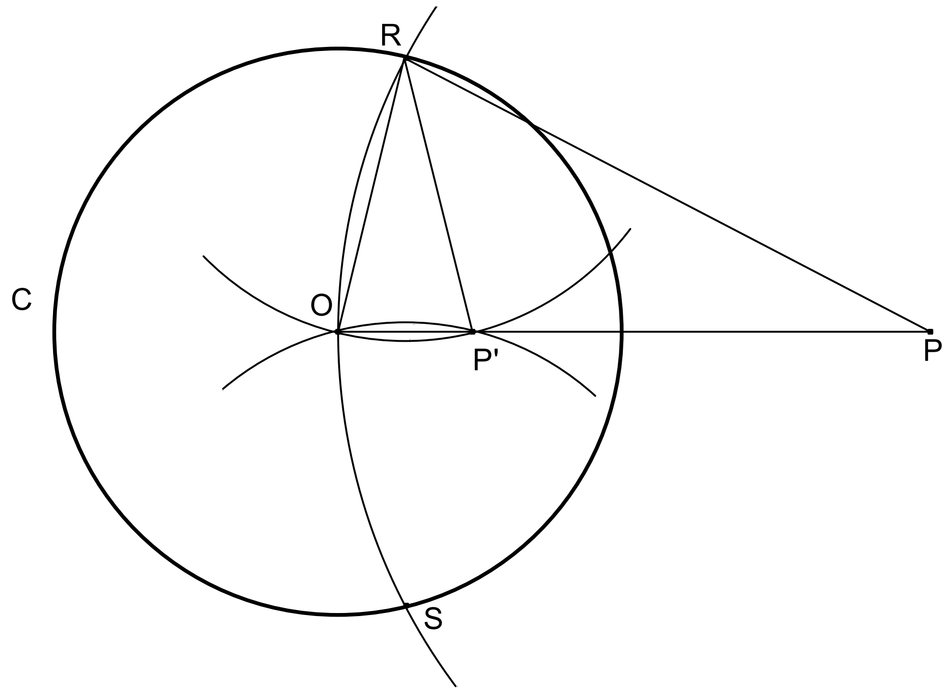


Consideraremos primeiro o caso em que P é um ponto externo à C.

Construa uma circunferência de centro P e raio PO, esta circunferência corta C em dois pontos distintos R e S.

Construa duas circunferências de centros R e S e raios RO e SO respectivamente.

Construção geométrica de pontos inversos-Teorema de Mohr-Mascheroni



As novas circunferências se interceptam-se nos ponto O e P’ sobre a reta OP.

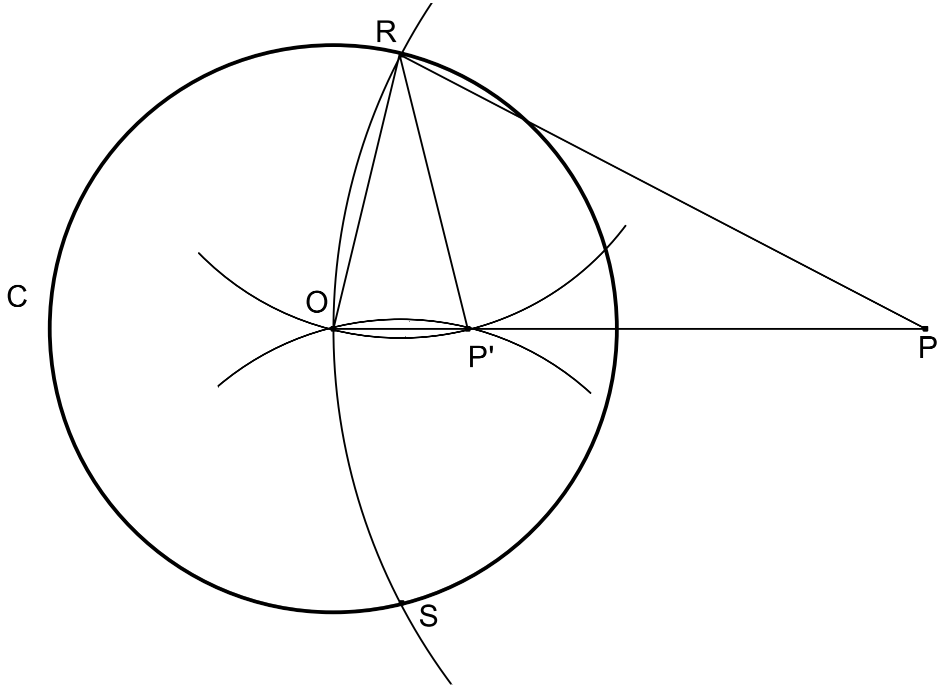
Observe os triângulos isósceles ORP e ORP’.

Em relação aos ângulos segue-se que:

ORP=POR=OP’R

Portanto os triângulos OPR e ORP’ são semelhantes.

Construção geométrica de pontos inversos-Teorema de Mohr-Mascheroni

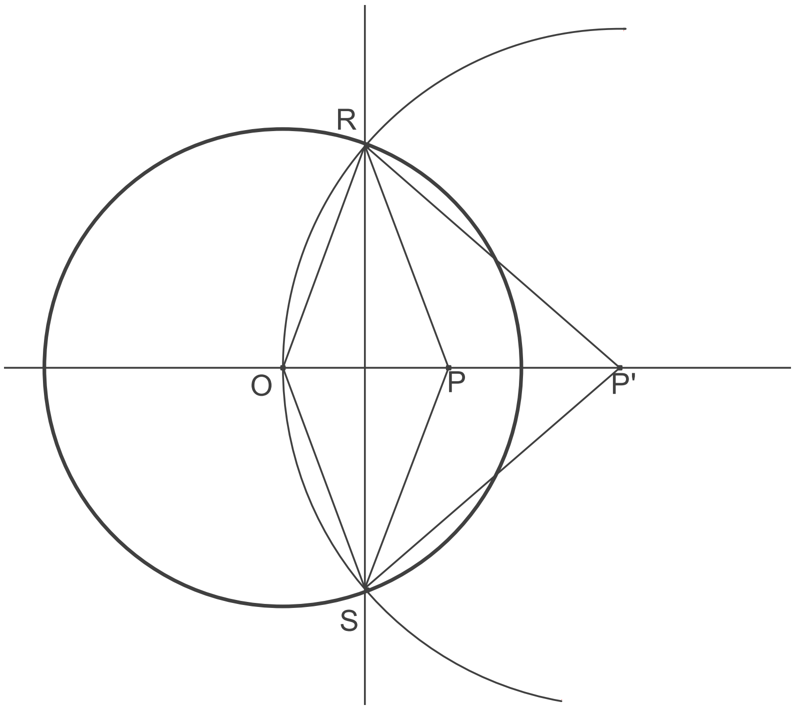


Da semelhança existente entre os triângulos OPR e ORP' temos:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP'}} \quad \text{isto é} \quad \overline{OP} \times \overline{OP'} = \left(\overline{OR}\right)^2 = r^2$$

Desta forma, P' é o inverso de P, que queríamos construir.

Considere agora o caso em que o ponto P é interno à circunferência C.



Considere uma circunferência C de centro O, e um ponto P interno a C.

Construa a mediatriz entre o ponto O e P, ela intercepta C nos pontos R e S como mostra a figura acima.

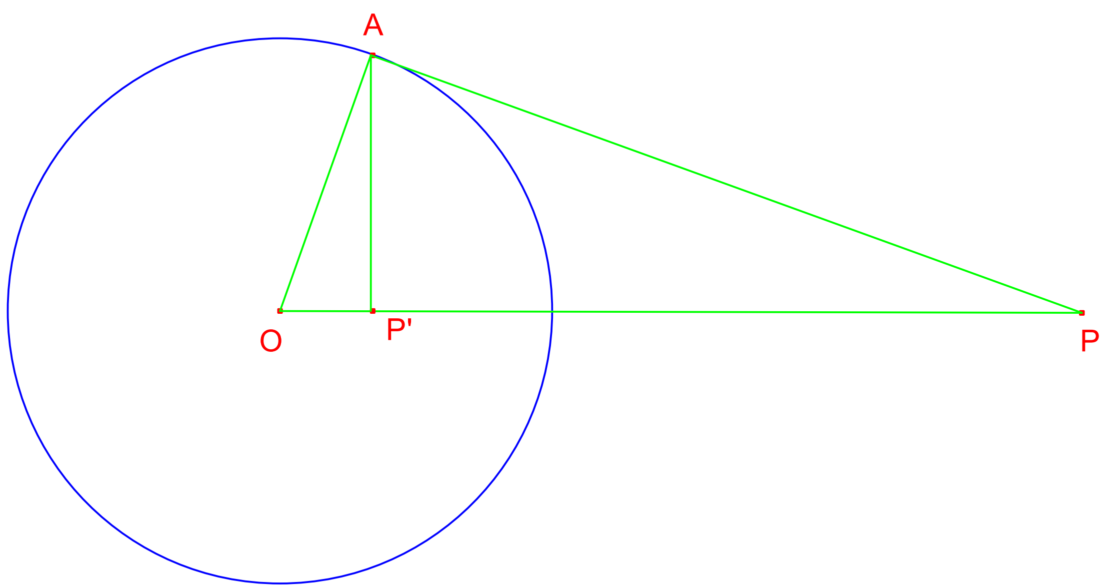
Agora construa uma circunferência passando pelos pontos R,O e S. Essa circunferência tem centro em P’ inverso de P.

A transformação geométrica: Inversão

Uma outra construção geométrica

1º caso: Considere o plano euclidiano E e uma circunferência C(O,r) e um ponto P externo a C. Constrói-se um segmento de reta tangente pelo ponto P à C no ponto A.

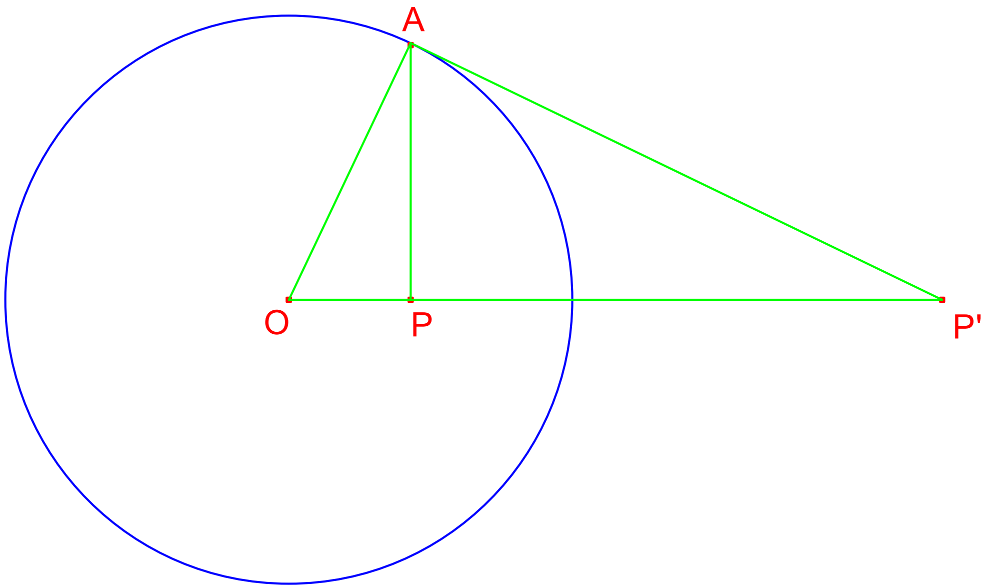
O ponto obtido pela intersecção da reta perpendicular ao segmento OP que passa por A, P', é chamado de inverso do ponto P em relação à circunferência C.



Cabri

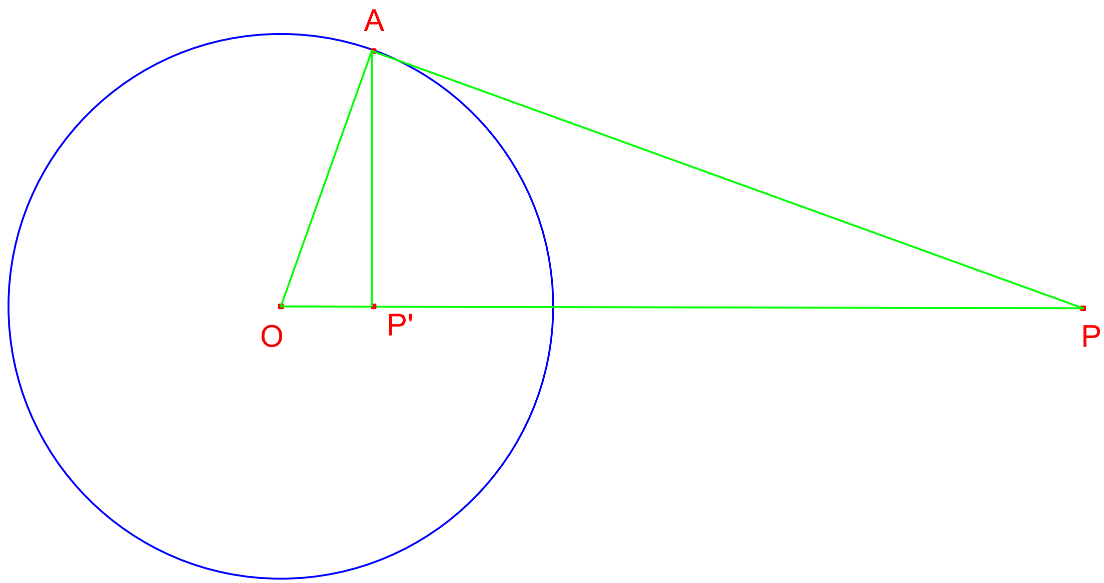
2º caso: Considere o plano euclidiano e o ponto P é interior à C, mas diferente de O, constrói-se um segmento de reta perpendicular ao segmento OP por P que intercepta C no ponto A.

O ponto P', inverso de P, é obtido pela intersecção da reta tangente à C no ponto A com o segmento OP.



Nos casos ilustrados acima, a relação entre P e P’ pode ser descrita por semelhanças de triângulos. Aplicando as relações métricas num triângulo retângulo provamos que:

$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = \left(\overline{OC}\right)^2 = r^2$$



Definição: *Dada uma circunferência C(O,r), a transformação geométrica que leva um ponto P ao ponto P' tal que:*

$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = \left(\overline{OC}\right)^2 = r^2$$

Chama-se inversão de centro O e raio r (ou um inversão referente a circunferência C)

Se P pertence à C, então P=P'.

A circunferência C é chamada de circunferência de inversão.

A inversão é *involutiva*, isto é, se P' é o inverso de P, P é o inverso de P'. E ainda podemos dizer que (P')'=P.

Daí segue-se:

✓ enquanto P se mantém no interior de C, seu inverso está no exterior

✓quanto mais próximo P está de C, mais seu inverso está de C

✓quando P se aproxima do centro de inversão, P' fica mais distante de O (infinito)

✓ uma inversão estabelece uma correspondência entre os pontos do plano e suas imagens, o que é uma correspondência *bijetora* sem exceção

Definição: *Lugar geométrico(LG) é um conjunto de pontos do plano que possuem uma determinada propriedade e só eles possuem.*

Por exemplo, uma circunferência C(O,r), é o lugar geométrico dos pontos que distam r de O.

Outros exemplo de lugares geométricos:

Bissetriz,

Mediana,

Mediatriz

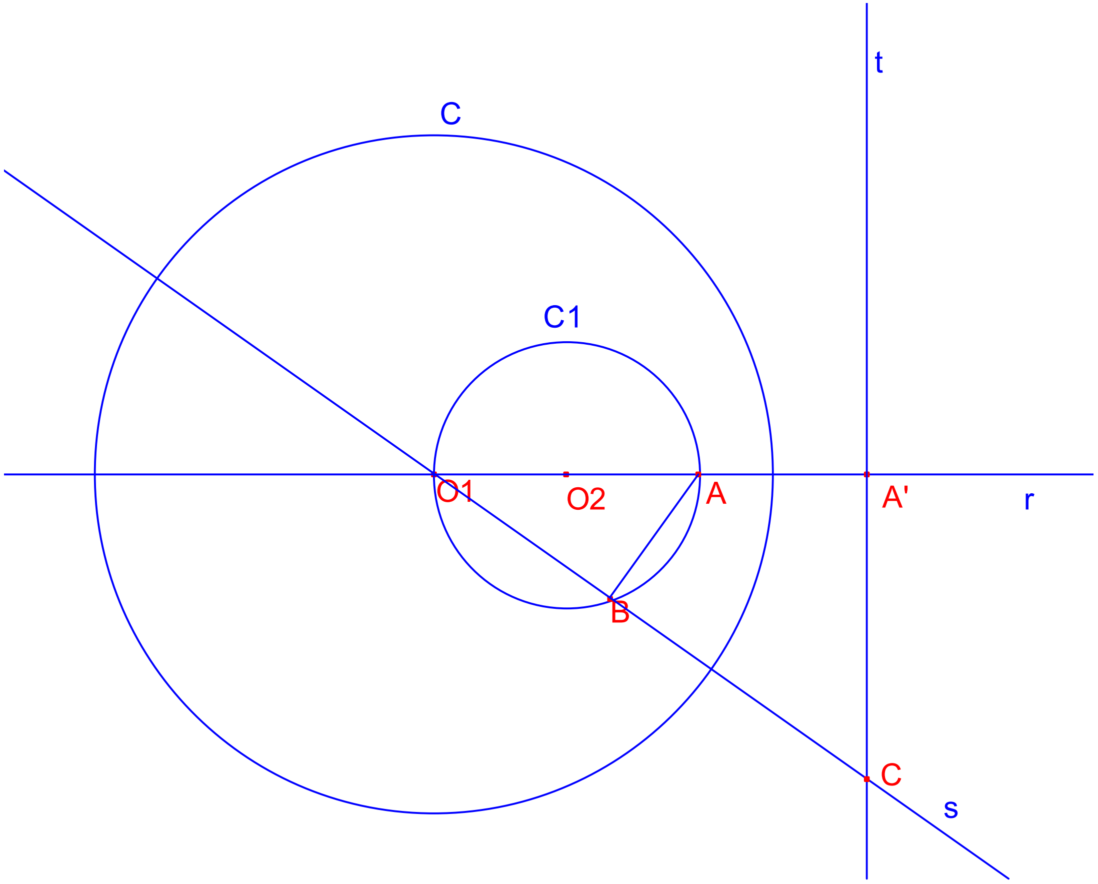
Inversões de retas e circunferências

A inversão de uma circunferência resulta em outra circunferência ou em uma reta. Isto depende da posição relativa da circunferência a ser invertida C1, em relação a circunferência de inversão C.

Lema1. A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.

Inicialmente faremos uma demonstração algébrica e depois geométrica, utilizando a ferramenta lugar geométrico do Cabri ou GeoGebra.

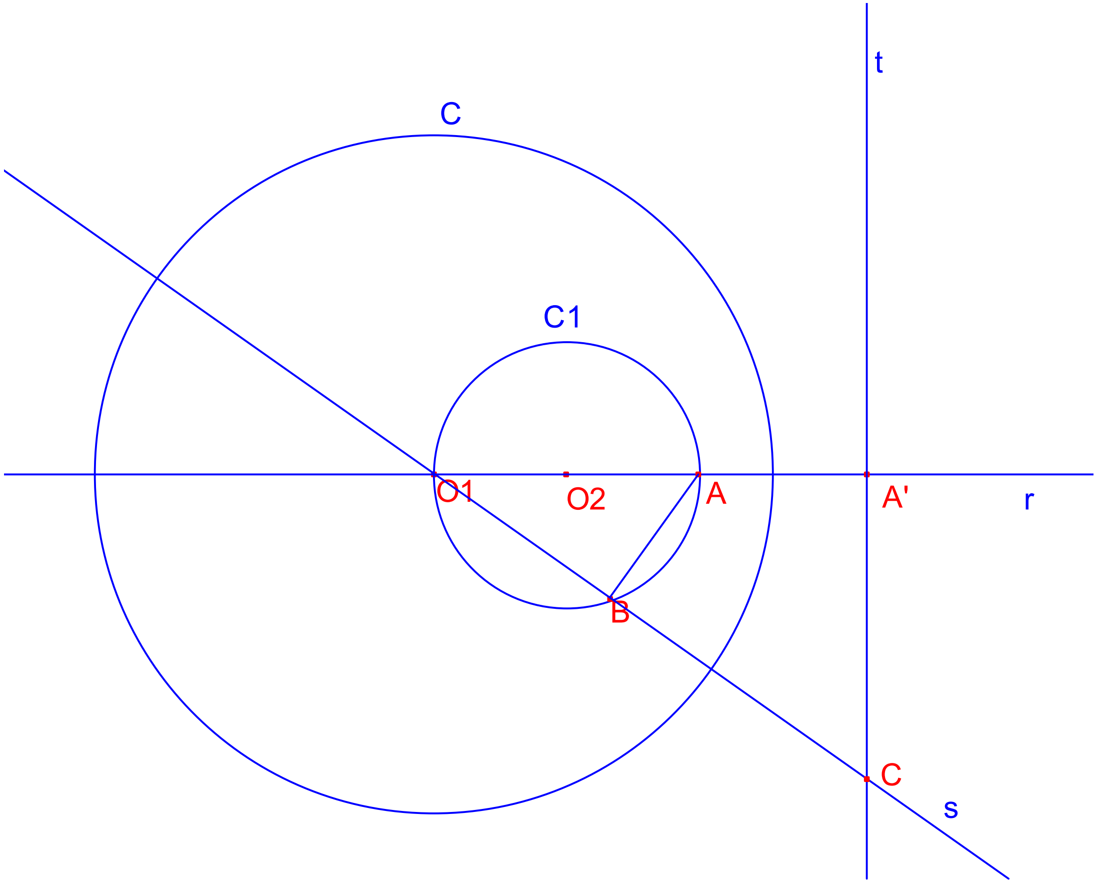
Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*



Demonstração:

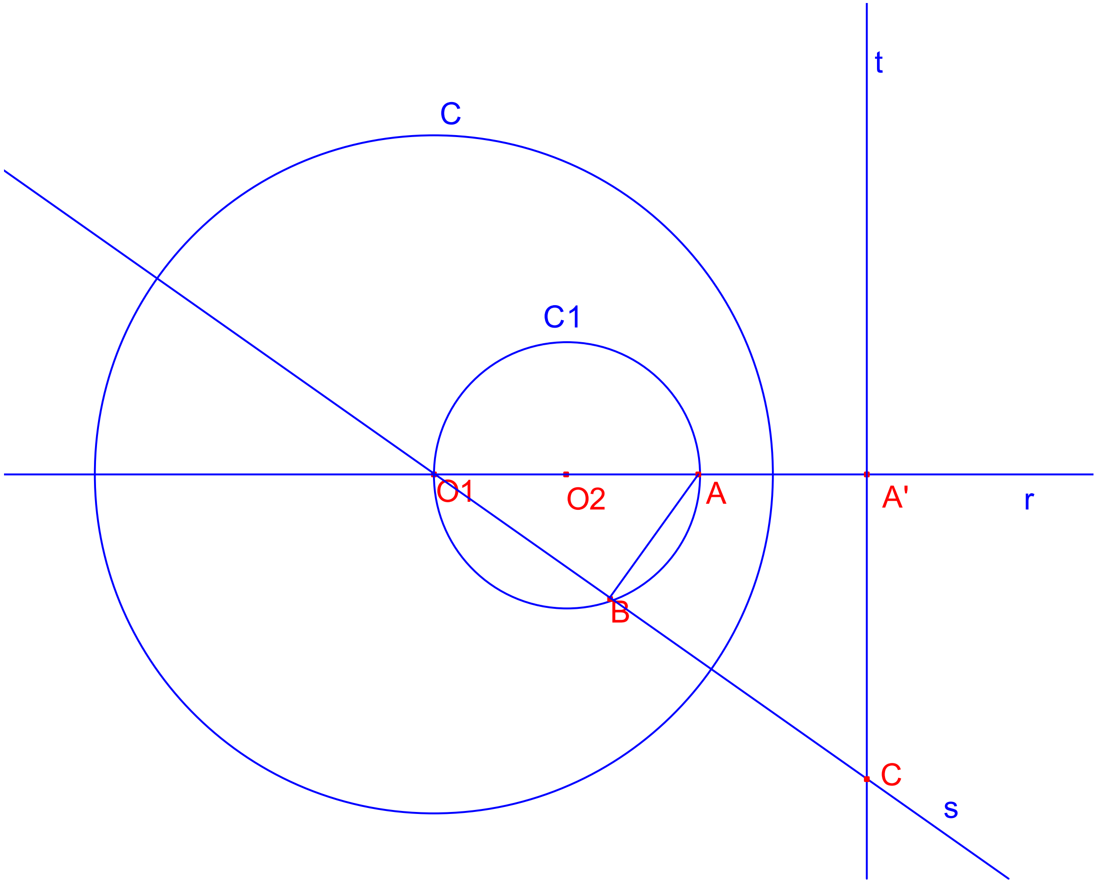
Seja C a circunferência de inversão, e C1 a circunferência que passa pelo centro de inversão O1.

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*



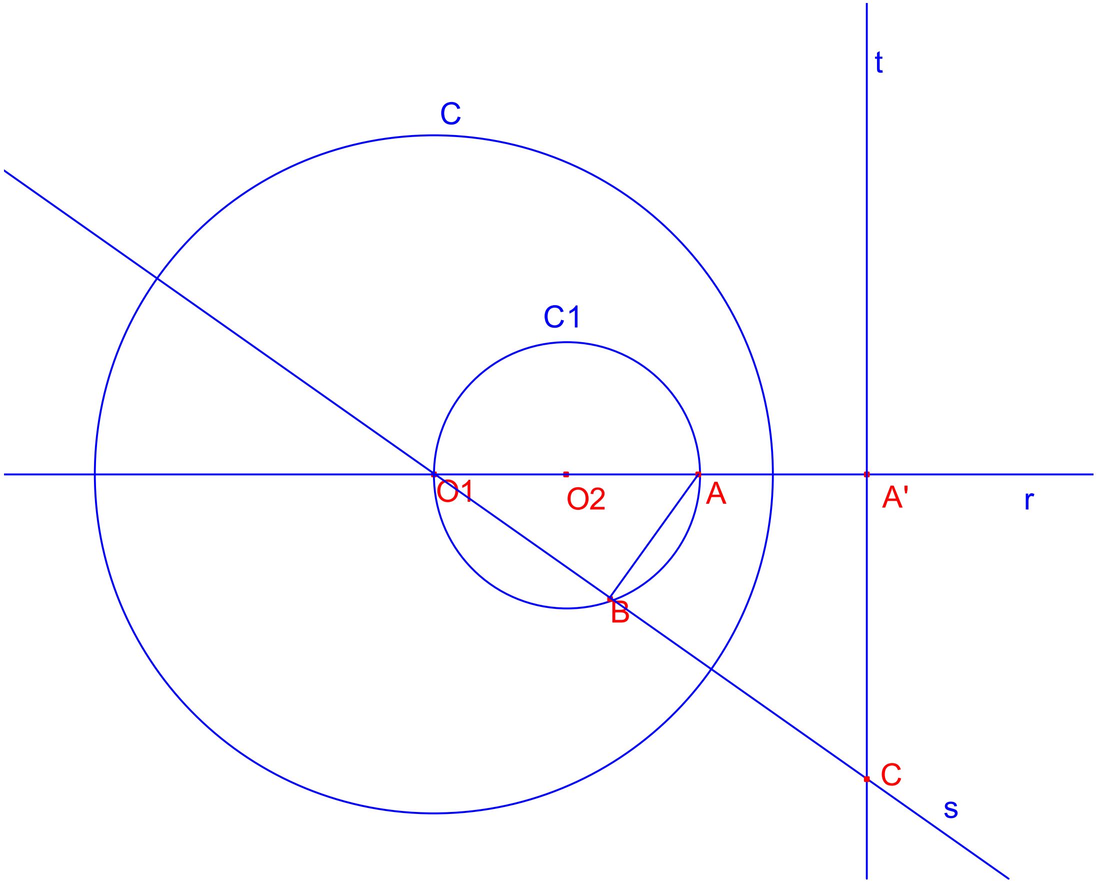
Seja A≠O1 o ponto onde a reta r que passa pelos centros O1 e O2 intercepta C1. Pelo ponto A', inverso de A, constrói-se uma reta t perpendicular a reta r.

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*



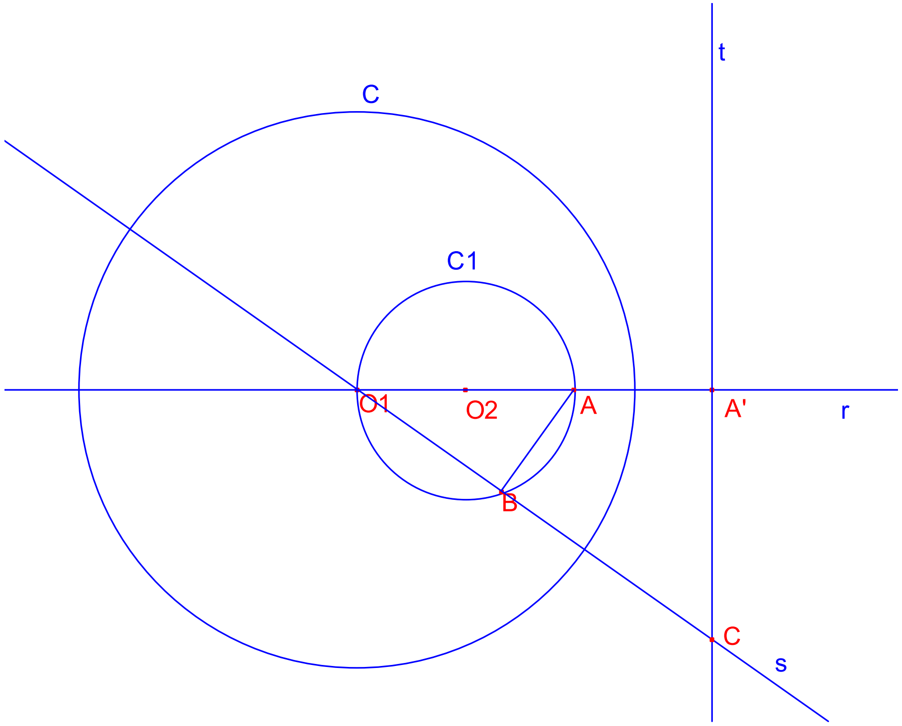
Seja B ≠O1 o ponto onde uma reta s passa pelo ponto O1 e intercepta C1. Seja C o ponto onde a reta s intercepta t.

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*



Observe que o ponto B pode pertencer, ser interno ou externo à circunferência C.

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*

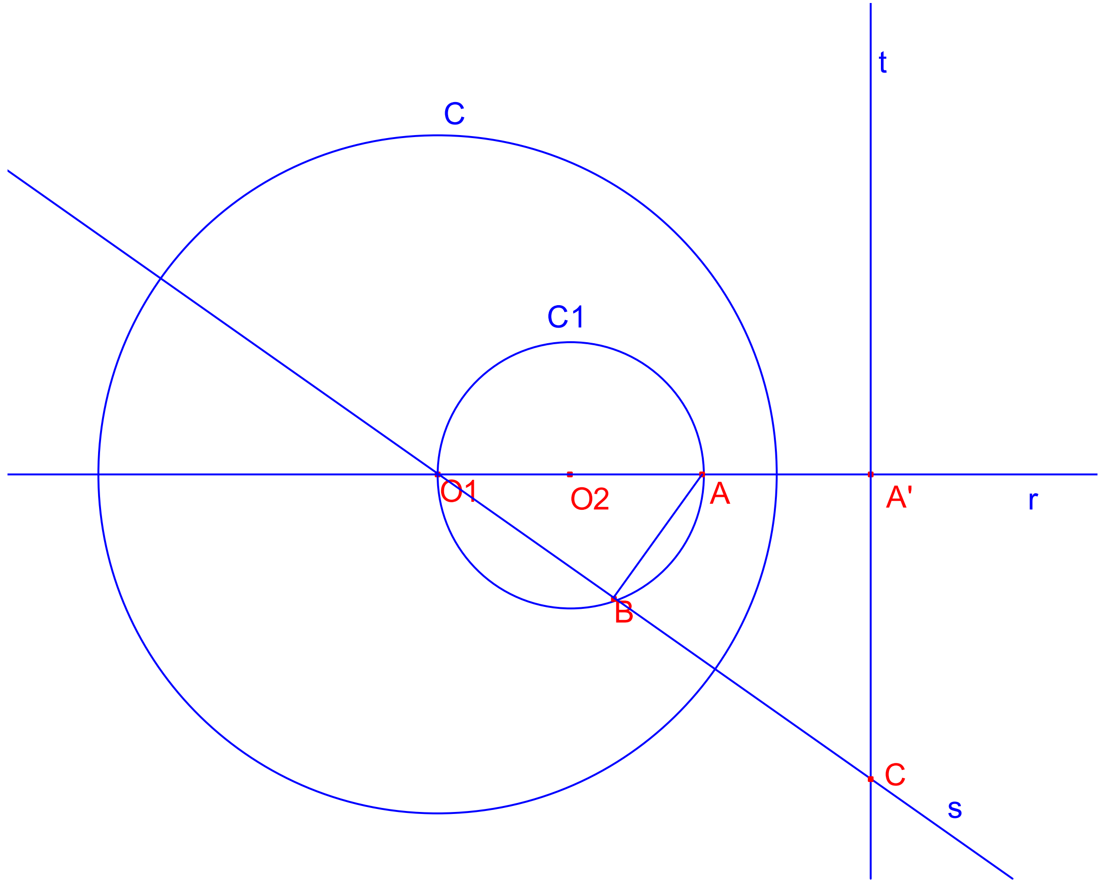


Se a reta s≠r, os triângulos formados, ABO1 e CA’O1, são semelhantes. Portanto:

$$\frac{\dfrac{\overline{O1B}}{\overline{O1A'}}}{} = \frac{\overline{O1A}}{\overline{O1C}}$$

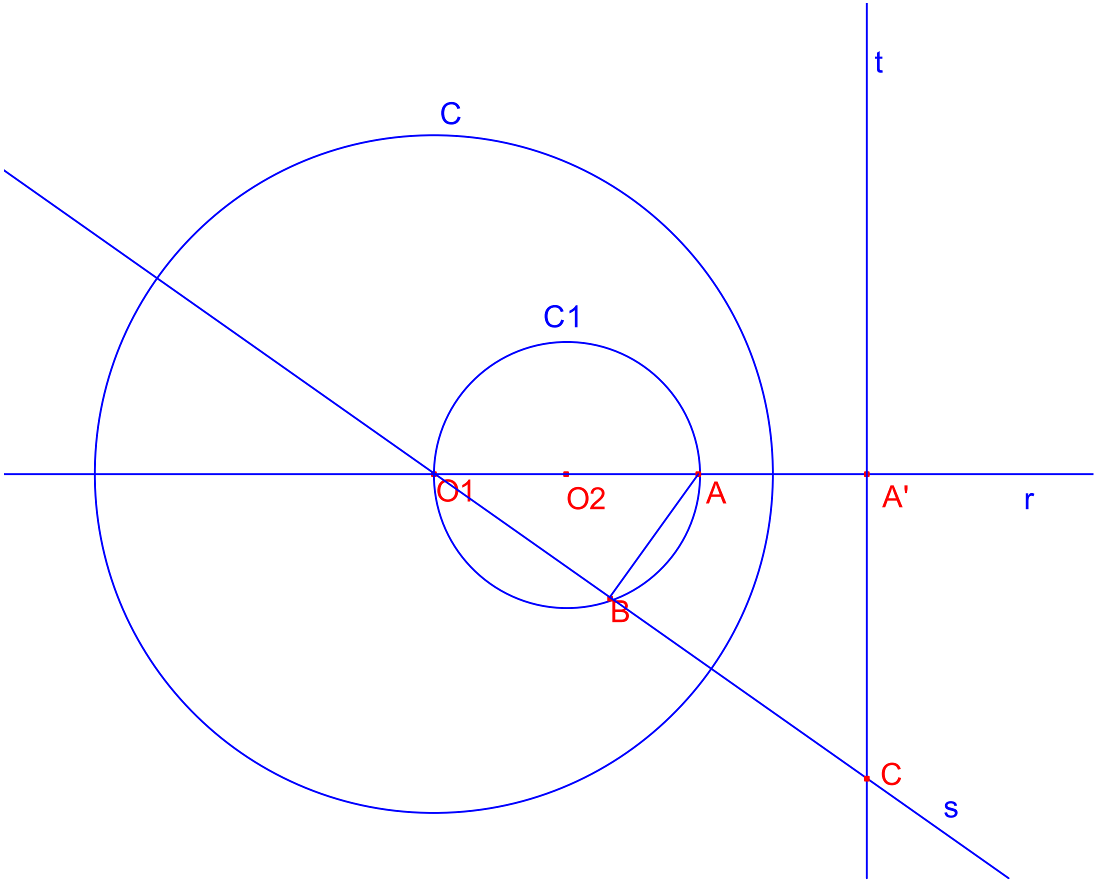
$$\overline{O1C} \times \overline{O1B} = \overline{O1A} \times \overline{O1A'} = r^2$$

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*



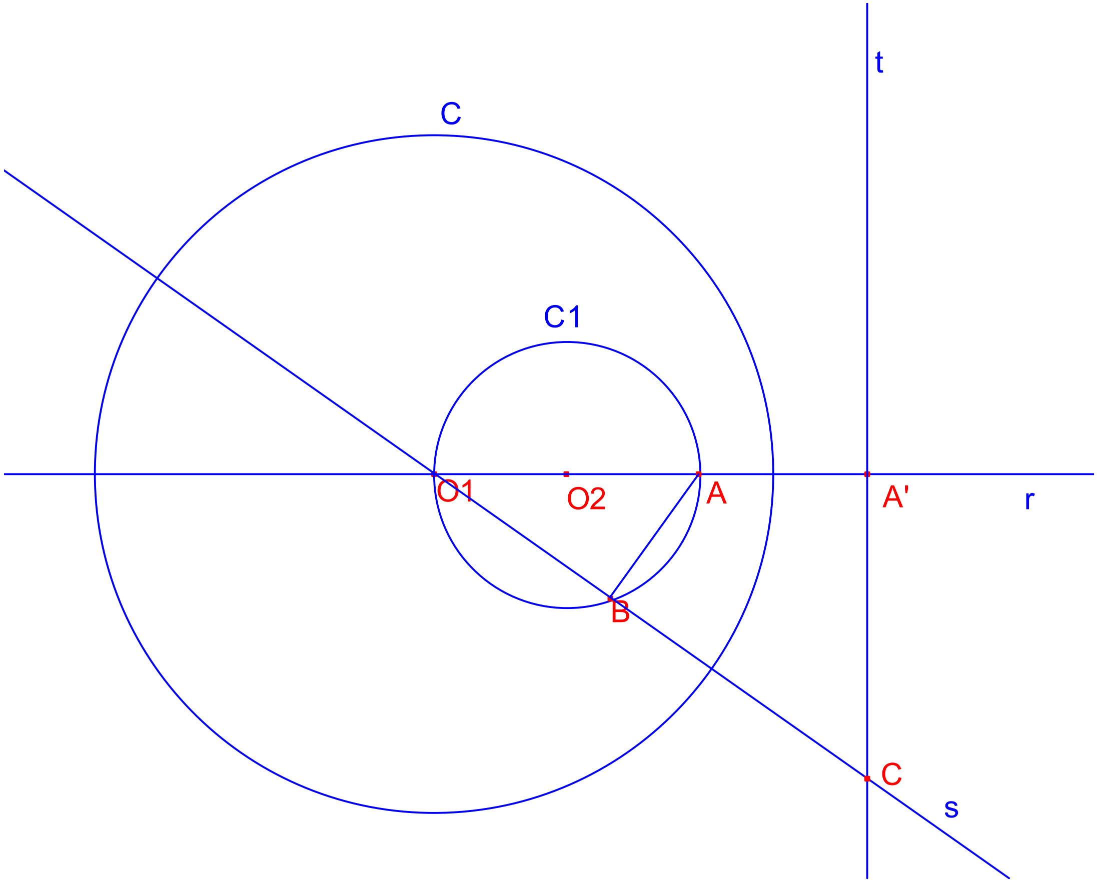
Logo, o ponto C é o inverso de B.
Se a reta s=r, o ponto A coincide com o ponto B. O ponto C coincide com o ponto A'. Por isso, o ponto C é inverso de B.

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*

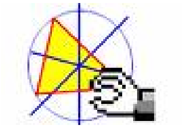


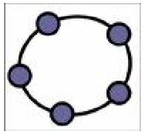
Como B descreve a circunferência C1, exceto B=O1, B'=C descreve a reta t. Como queríamos provar.

Lema1. *A figura inversa de uma circunferência C1 que passa pelo centro de inversão é uma reta.*



Vamos agora demonstrar geometricamente utilizando um recurso de Geometria Dinâmica (Cabri ou GeoGebra).

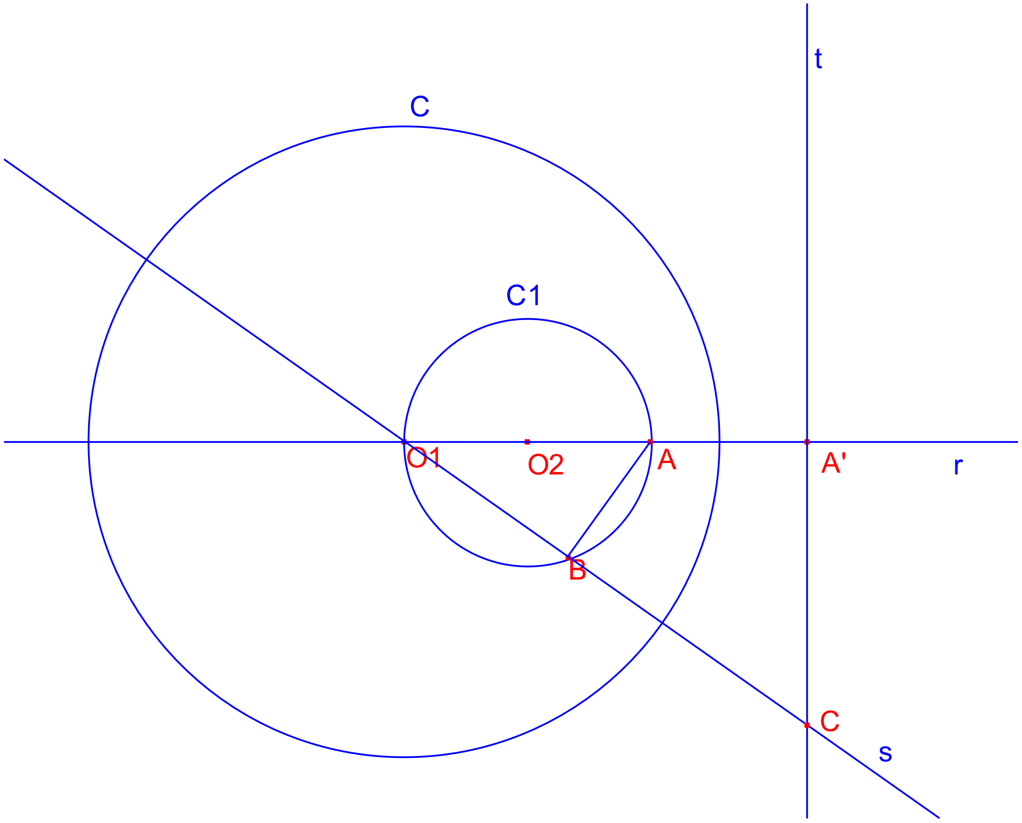




Lema 2: *A figura inversa de uma reta t que não passa pelo centro de inversão é uma circunferência que passa pelo centro de inversão.*

A demonstração é feita de forma inversa ao da demonstração do Lema1.

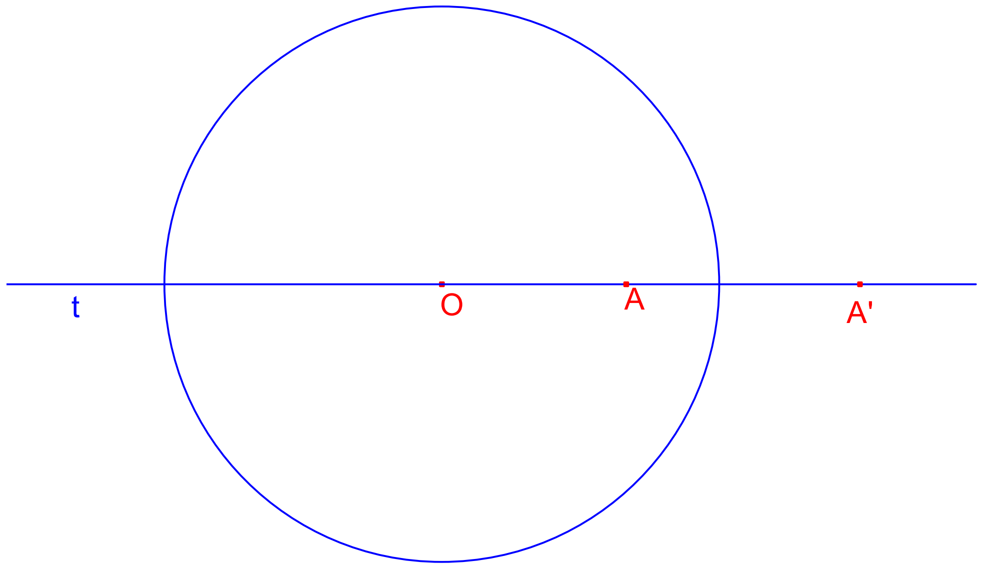
A demonstração fica como exercícios para as férias!!!!



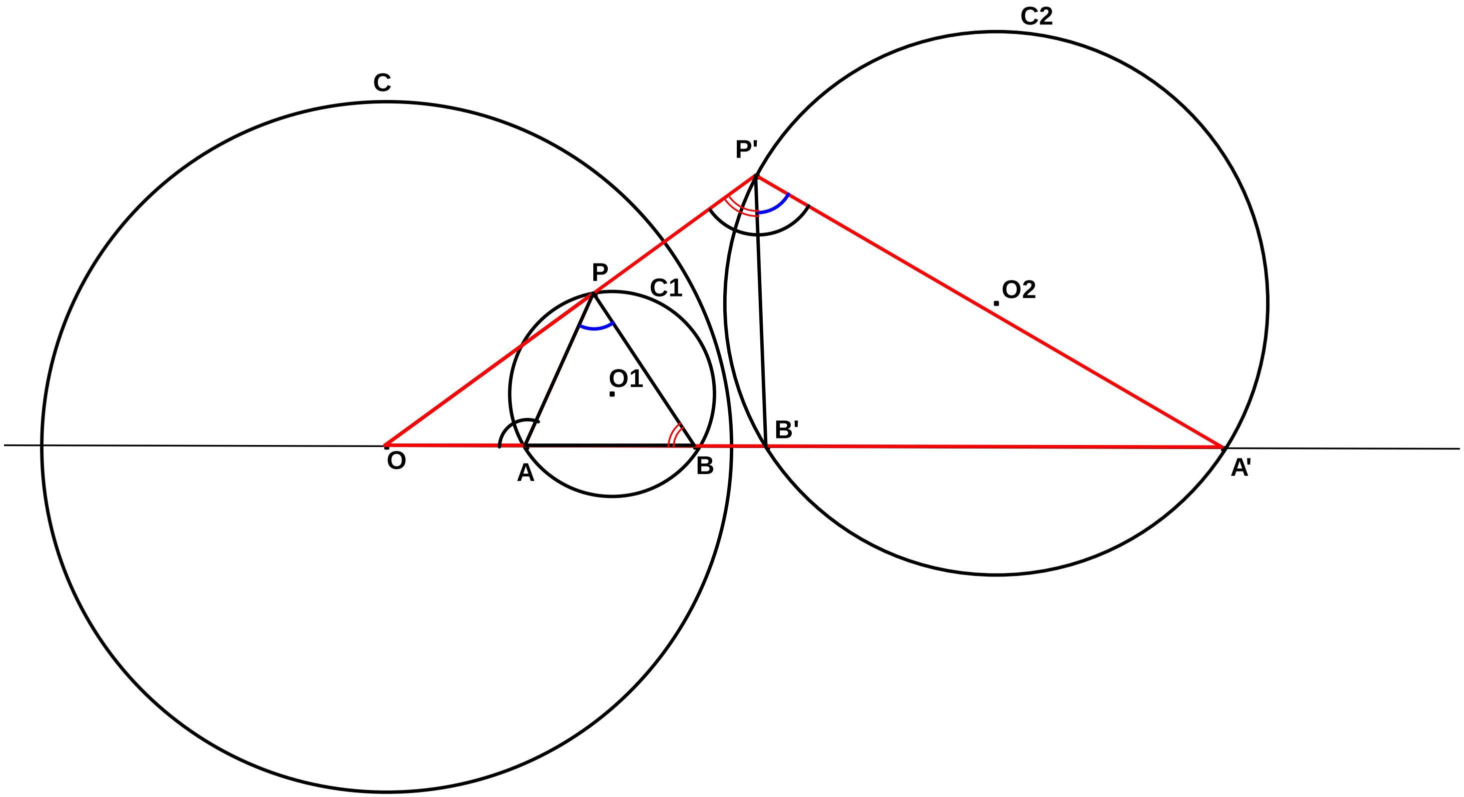
Lema 3: A inversa de uma reta t que passa pelo centro de inversão coincide com a inversa t’, ou seja t.

Demonstração:

Seja C(O,r) a circunferência de inversão e t a reta a ser invertida. Seja ainda A≠O um ponto da reta t e A’ seu inverso. Como a reta t passa pelo centro de inversão O, o ponto A’ está sobre t. Uma vez que o ponto A descreve a reta t, A’ descreve a reta t’, que coincide com a reta t. Como queríamos demonstrar.

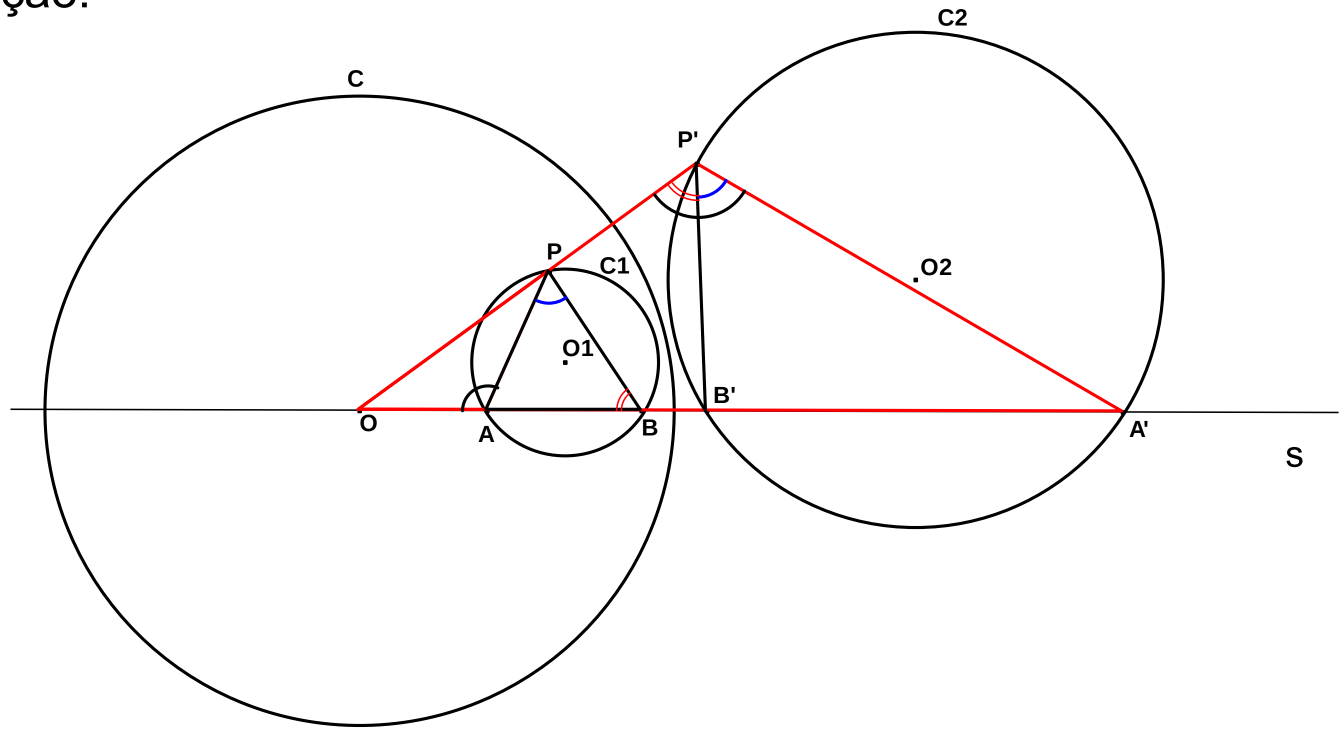


Lema 4: *A figura inversa de uma circunferência C1 que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência C2 que não passa por O.*



Lema 4: *A figura inversa de uma circunferência C1 que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência C2 que não passa por O.*

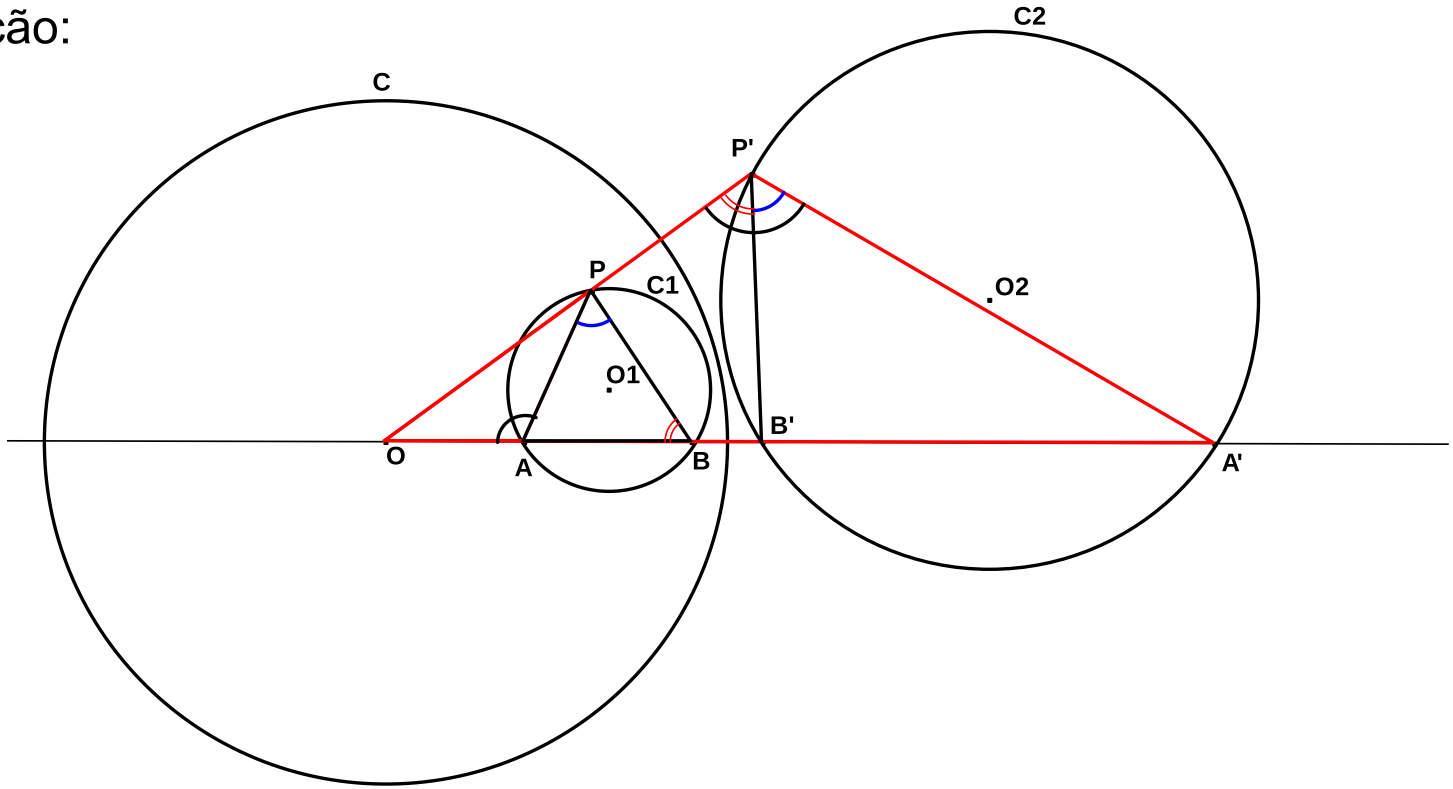
Demonstração:



Seja C(O,r) a circunferência de inversão, e C1 a circunferência a ser invertida. Seja A e B os pontos onde a reta s que passa pelo centro de inversão e intercepta C1. Seja P um ponto de C1. Sejam A', B' e P' os inversos dos pontos A, B e P. Pela definição de inversão temos:

Lema 4: *A figura inversa de uma circunferência C1 que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência C2 que não passa por O.*

Demonstração:

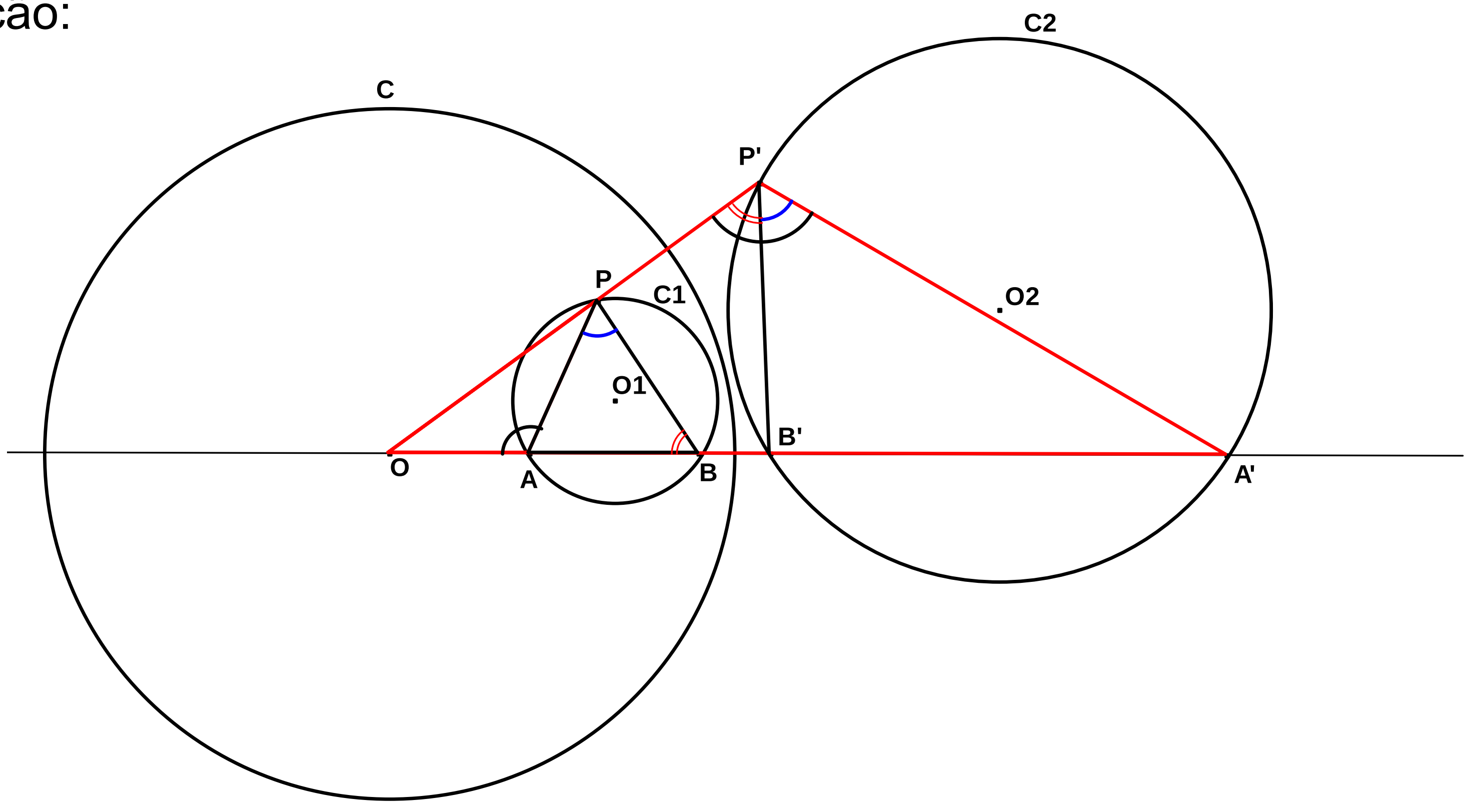


$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}} = K$$

Lema 4: *A figura inversa de uma circunferência C1 que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência C2 que não passa por O.*

Demonstração:

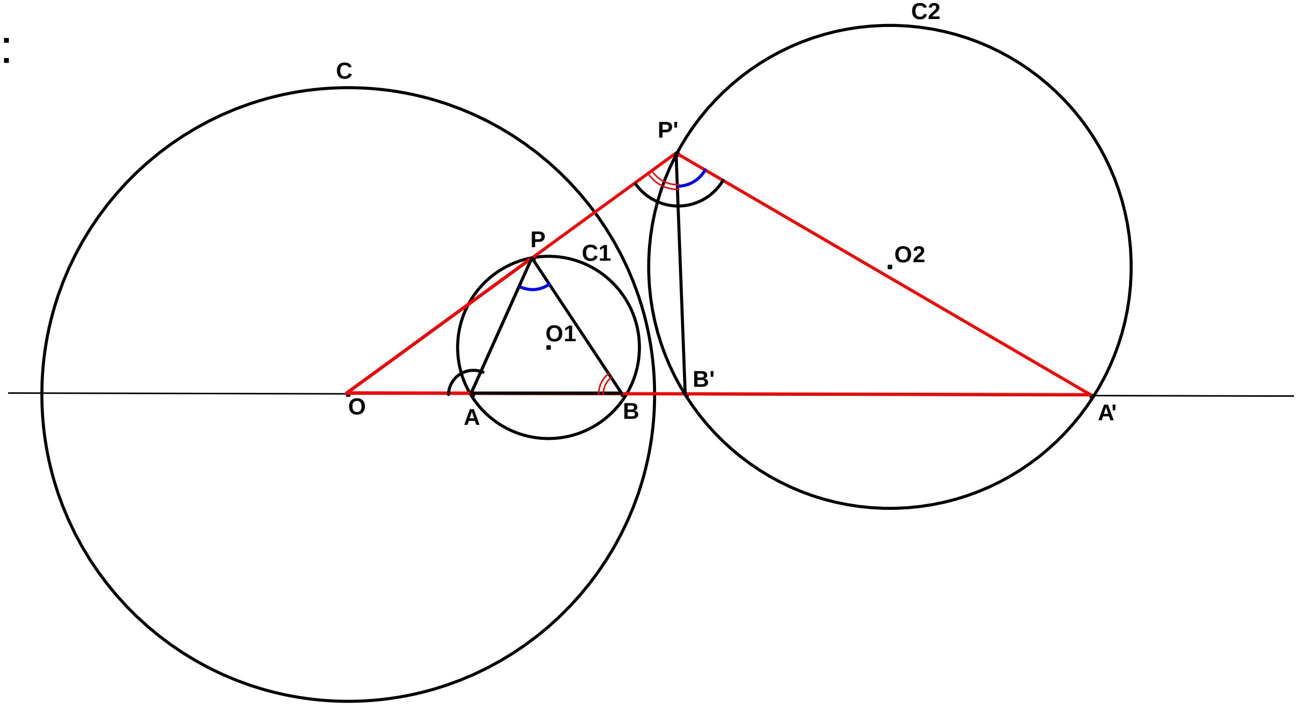


Seja P≠A, P≠B, então os triângulos OAP e OP’A’ são semelhantes(L.A.L).

Sejam os ângulos OAP e OBP. O ângulo OAP=ABP+APB (teorema do ângulo externo). Como OP’A’=OAP e OP’B’=OBP segue-se que os ângulos:

Lema 4: *A figura inversa de uma circunferência C1 que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência C2 que não passa por O.*

Demonstração:



A’P’B’=PAO-OP’B’=APB

Como os ângulos APB=A’P’B’, P’ descreve a circunferência C2.

C2 não passa pelo centro de inversão O, pois pelo lema 1 a inversa de uma circunferência que passa pelo centro de inversão é uma reta.

Os inversos de A e de B pertencem a C2. ***cqd***

Propriedades da Inversão

P1: Seja C'(O',r') uma circunferência que passa pelo centro de inversão O, então sua inversa é uma reta ortogonal a OO' e que não passa por O.

P2: A inversa de uma reta que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência que passa pelo centro de inversão O.

P3: A inversa de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão O, é uma circunferência que não passa por O.

P4: A inversa de uma circunferência C(O1,r') que passa pelo centro de inversão O, é uma reta perpendicular à semi reta OO1 que não passa por O.

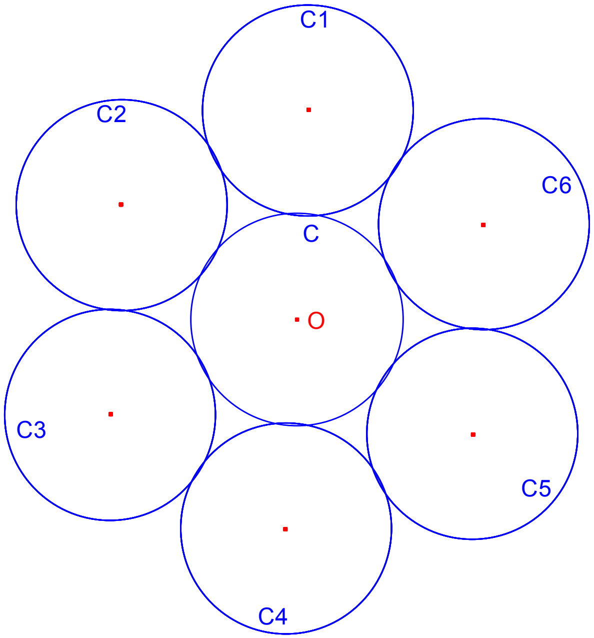
P5: As inversões preservam tangências. Isto é, circunferências tangentes são transformadas em circunferências tangentes.

P6: A inversa de uma reta que passa pelo centro de inversão O é uma reta que passa por O.

Problemas de tangências entre circunferências

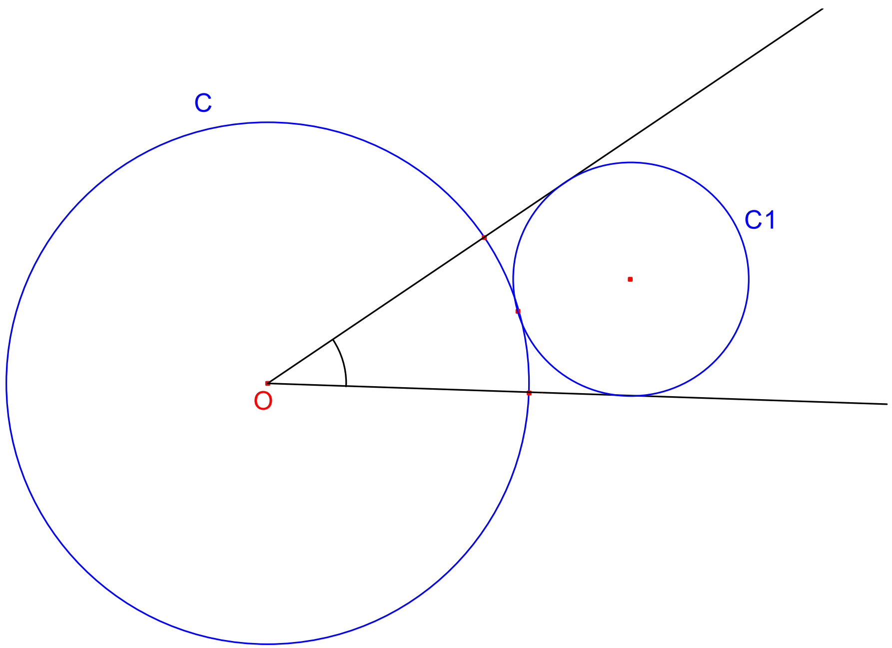
Problema 1:

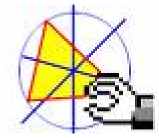
Dada uma circunferência C(O,r) qualquer, construir uma seqüência C1, C2,..., Cn de n circunferências tangentes externamente a C de tal forma que duas circunferências contíguas quaisquer sejam tangentes entre si.



Procedimento empregado:

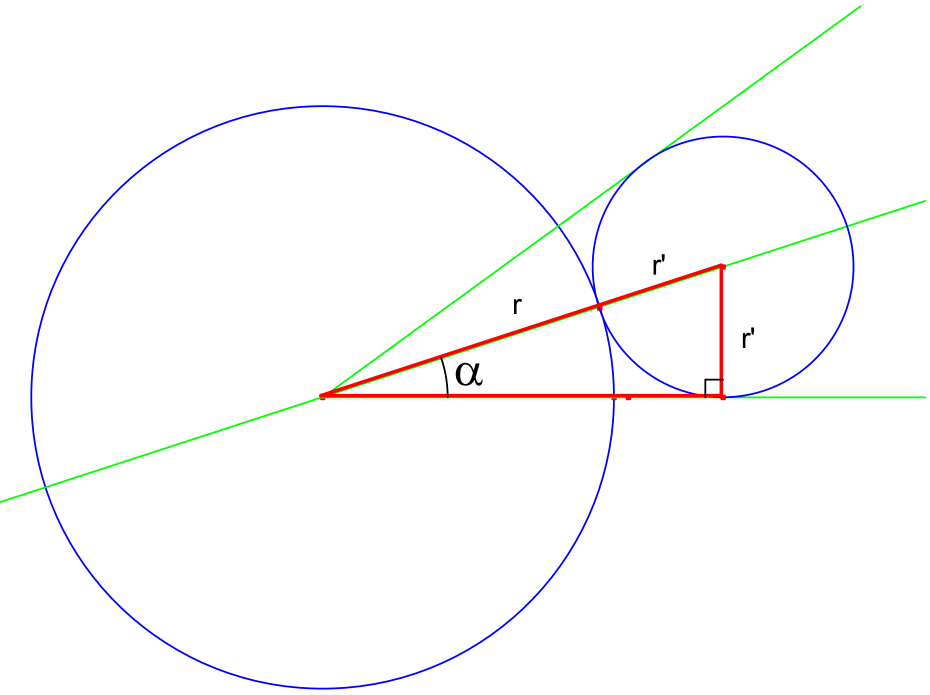
Construiremos uma circunferência C1, tangente à circunferência C inscrita num ângulo de medida 360º/n.





Relação entre os raios

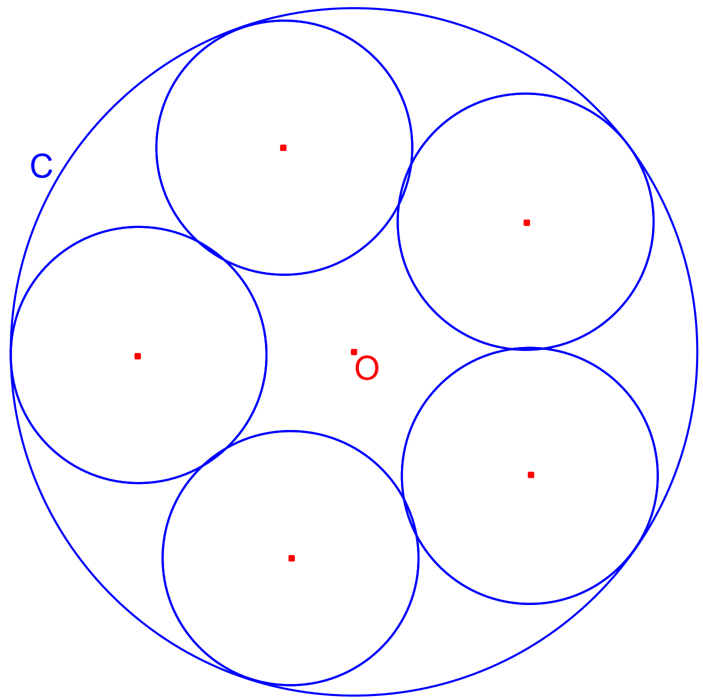
A relação existente entre os raios r, da circunferência C, e r', das circunferências externas, pode ser determinada sem dificuldade. De fato, conforme permite observar na figura abaixo, se θ é o ângulo de rotação e $\alpha = \theta/2$, podemos escrever:



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{r'}{r + r'} \text{ e, daí, } r' = \frac{r.sen(\alpha)}{1 - \text{sen}(\alpha)}.$$

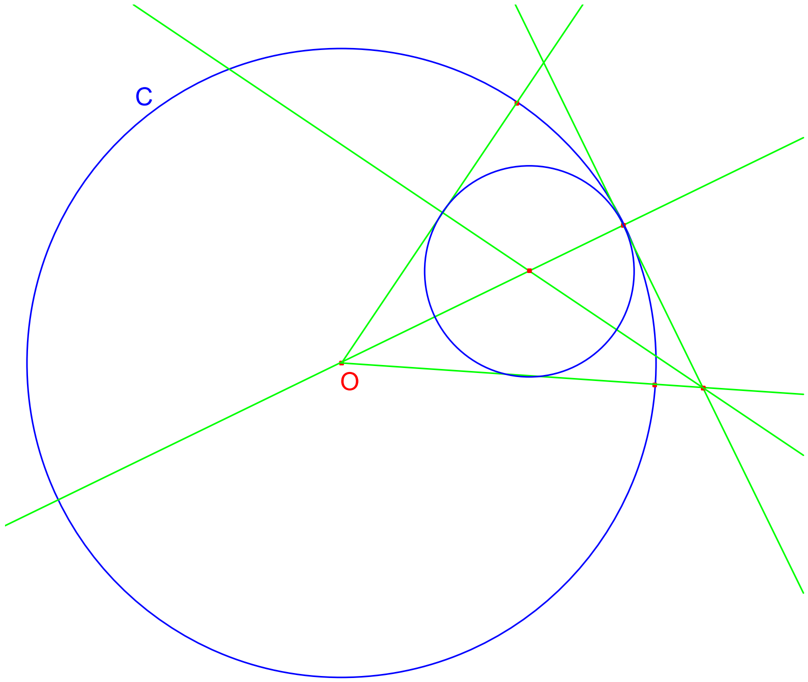
Problema 2:

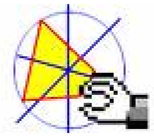
Dada uma circunferência C(O,r) qualquer, construir uma seqüência C1, C2, ..., Cn de n circunferências tangentes internamente a C de tal forma que duas circunferências contíguas quaisquer sejam tangentes entre si.



Procedimento empregado:

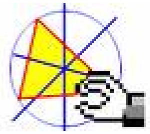
1ª estratégia: Repetir os mesmos procedimentos do problema 1.



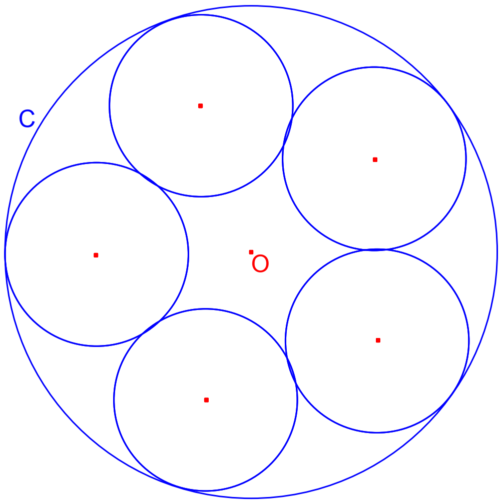


Procedimento empregado:

2ª estratégia: Recorrendo a edição numérica, colocando um valor negativo.

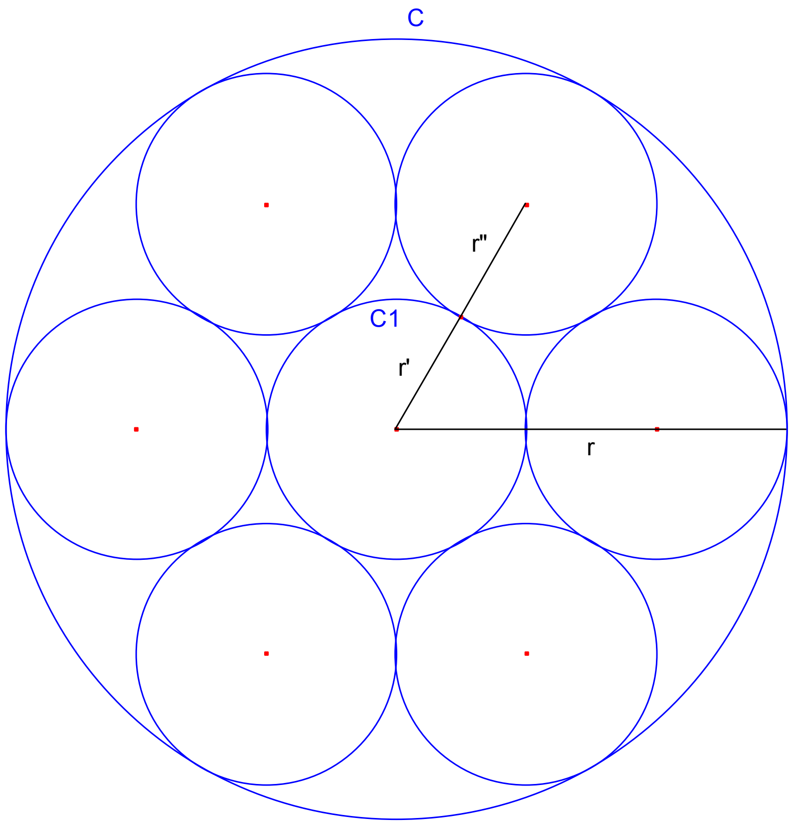


3ª estratégia: Constrói-se uma circunferência C1 tangente a C, como na 1ª estratégia, em seguida inverte-se C1 em relação a C.



Problema 3:

Dadas duas circunferências concêntricas C e C1 de raios r e r', respectivamente, construir uma seqüência C1, C2, ..., Cn de n circunferências tangentes internamente a C e externamente a C1 de tal forma que duas circunferências contíguas quaisquer sejam tangentes entre si.



É fácil ver que o raio r de C e o raio r'' de C1, C2, ..., Cn , satisfazem a relação r - r' = 2r''.

Daí conjugada com a relação

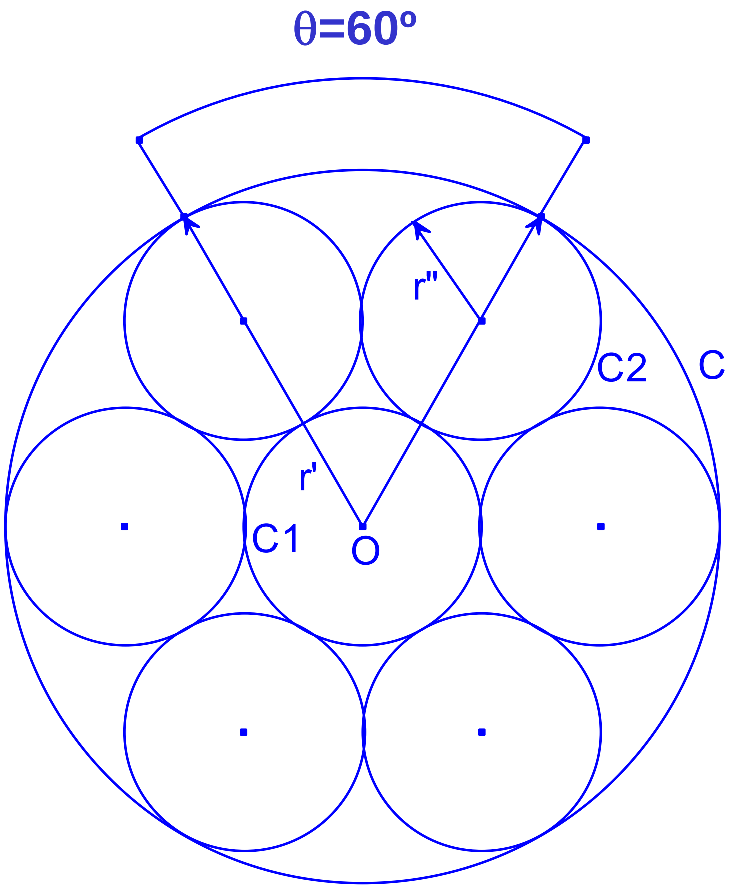
$$r' = \frac{r \,.\, \operatorname{sen}(\alpha)}{1 - \operatorname{sen}(\alpha)}$$

podemos escrever:

$$\frac{\theta}{2} = \operatorname{arcsen} \frac{r - r'}{r + r'}$$

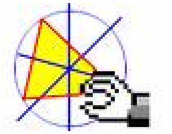
Procedimento empregado:

O processo de construção, neste caso, não difere dos anteriores. A circunferência C2, que será rotacionada em torno de O, tem o seu raio dado por r'' = (1/2)(r - r'). **Fazendo r=3r' temos:**



$$\frac{\theta}{2} = \text{arcsen}\,\frac{r - r'}{r + r'}$$

$$\frac{\theta}{2} = arcsen\left(\frac{3r' - r'}{3r' + r'}\right) = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 30^{o}$$



Problema 4

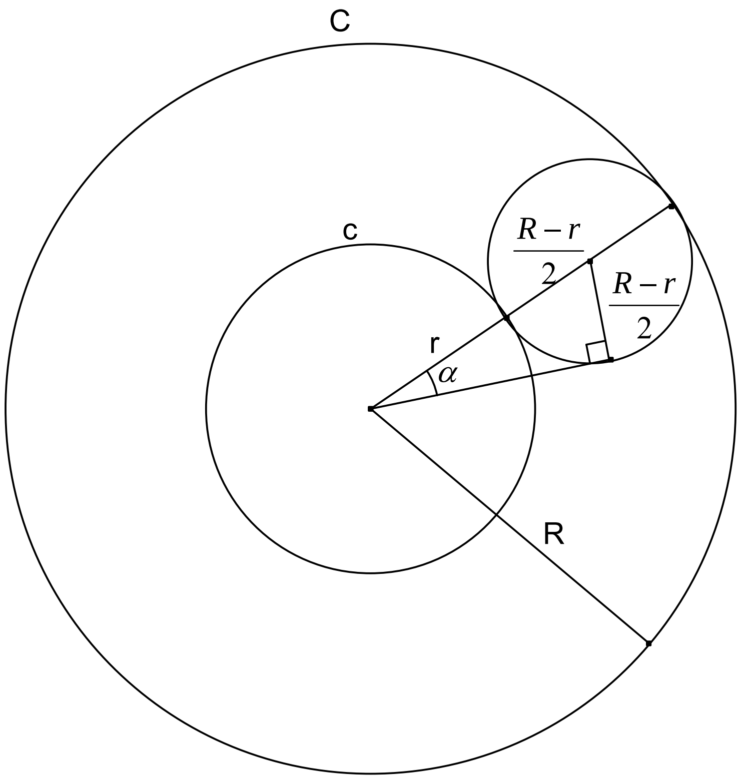
Porismo de Steiner

Sejam c, C círculos disjuntos e K um terceiro círculo tangente aos dois. Uma cadeira de Steiner de tamanho n para o par (c,C), construída a partir de K, é uma seqüência de n círculos, $K_1,K_2,K_3,\ldots,K_n$, tangentes a c e C tais que $K=K_1=K_{n+1}$ e K_i é tangente a k_{i+1}, para cada $1 \leq i \leq n$.

O Porismo de Steiner é trivial no caso em que c e C são concêntricas, problema 3.

É fácil ver que exite uma cadeia de Steiner de tamanho n dando K voltas se, e somente se, os raios r e R dos círculos c e C satisfazem:

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - sen\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1 + sen\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$



$$\frac{r}{R} = \frac{1 - sen\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1 + sen\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$sen(\alpha) = \frac{R-r}{R+r}$$

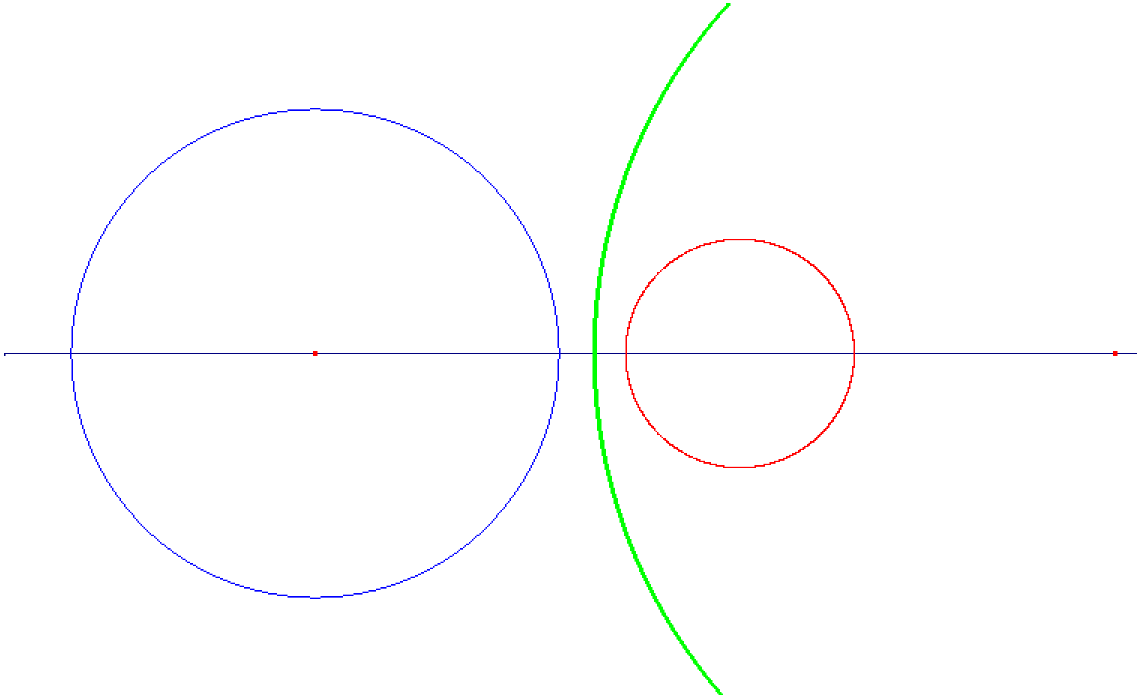
$$(\alpha) = arcsen\left(\frac{R-r}{R+r}\right)$$

Construção de circunferências concêntricas

O caso em que c e C são internos e não concêntricos pode ser reduzido ao caso particular por meio de inversões geométricas.

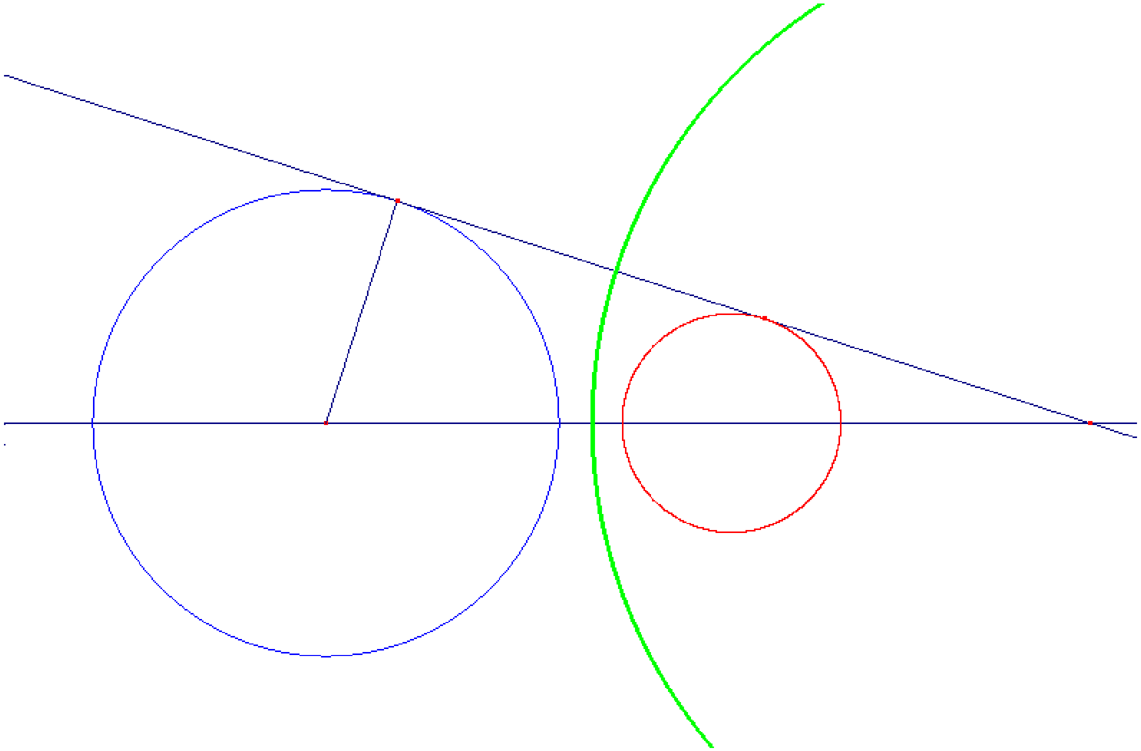
Construção de duas circunferências concêntricas a partir de duas não concêntricas:

Sabemos sobre a teoria das inversões no plano que:

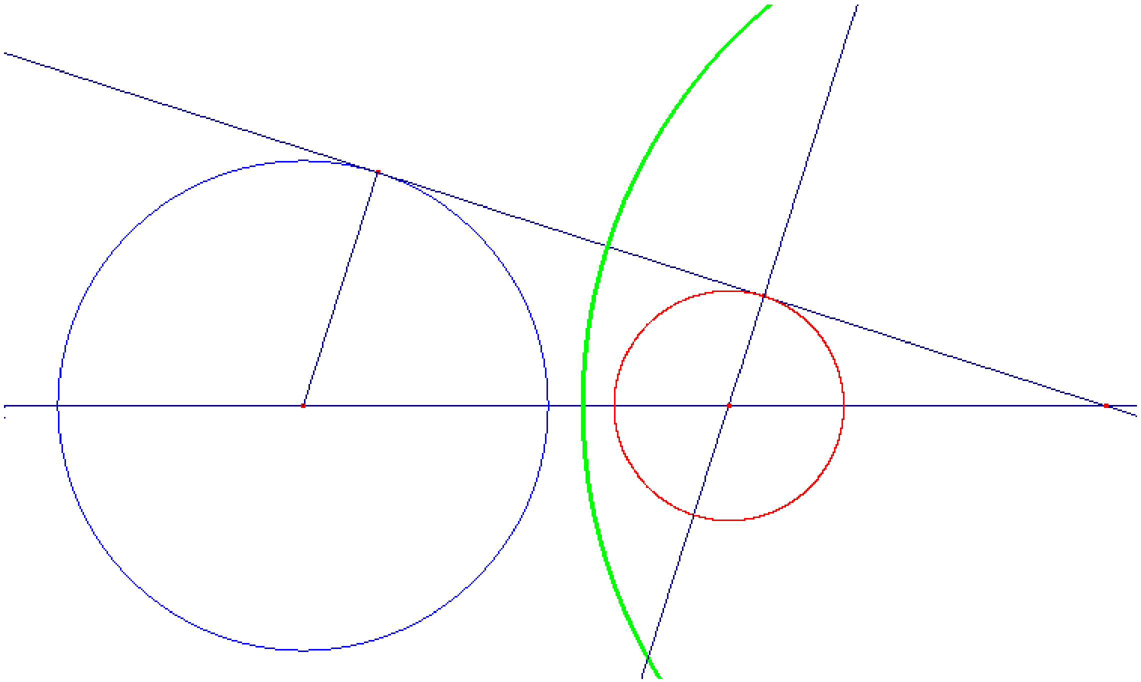


Se invertemos uma circunferência (azul) em relação à outra (verde) obtemos uma terceira (vermelha) (desde que a azul esteja fora da verde).

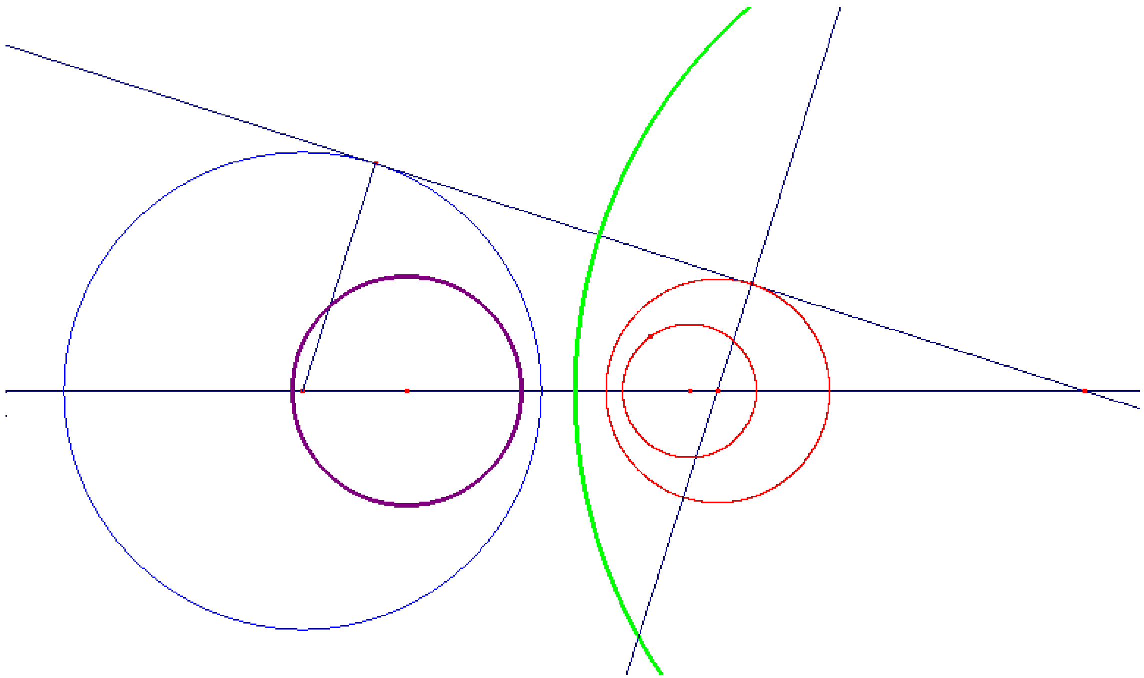
Se acharmos a reta tangente á azul, que passa pelo centro da inversora, essa reta também tangência a vermelha.



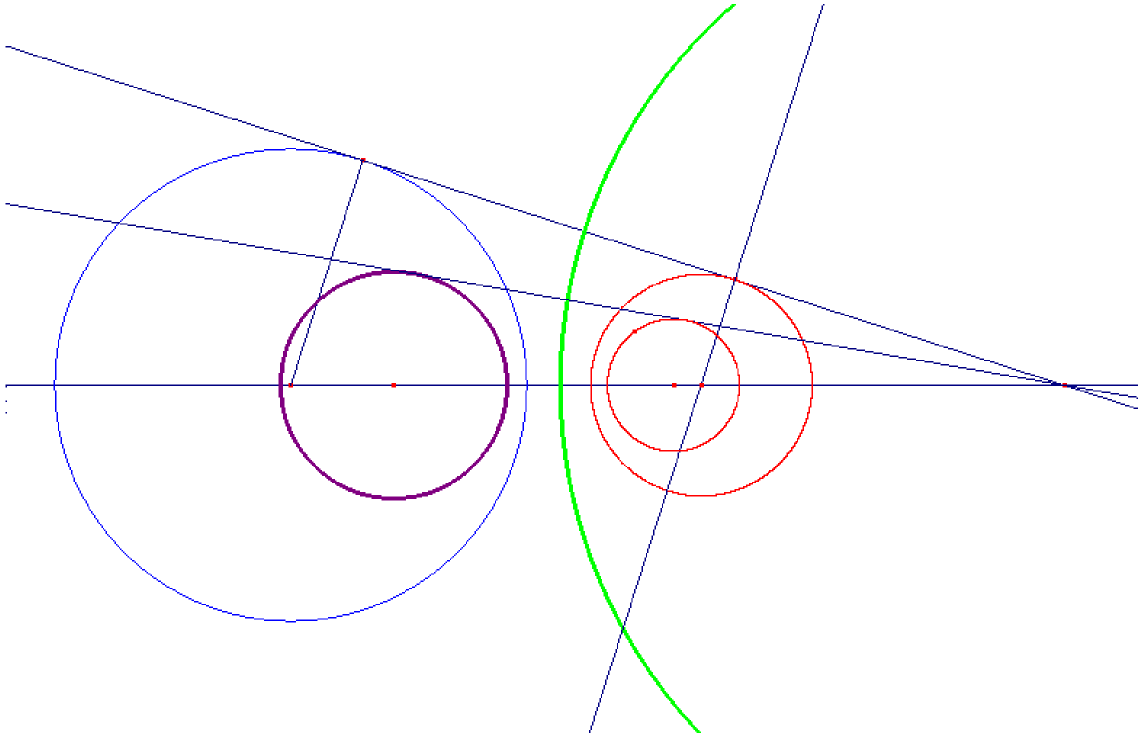
Com isso podemos achar o centro da vermelha.



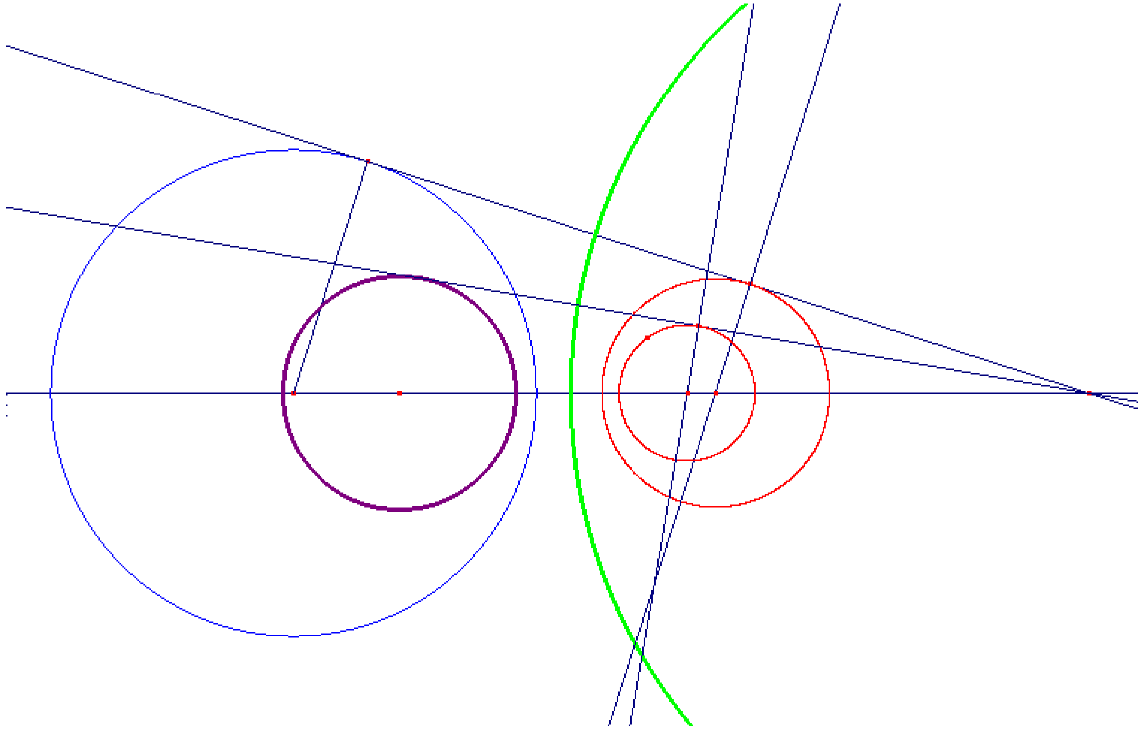
Se tivermos agora uma outra circunferência (marrom) dentro da azul e acharmos a inversa em relação à verde essa inversa também vermelha estará dentro da outra vermelha.



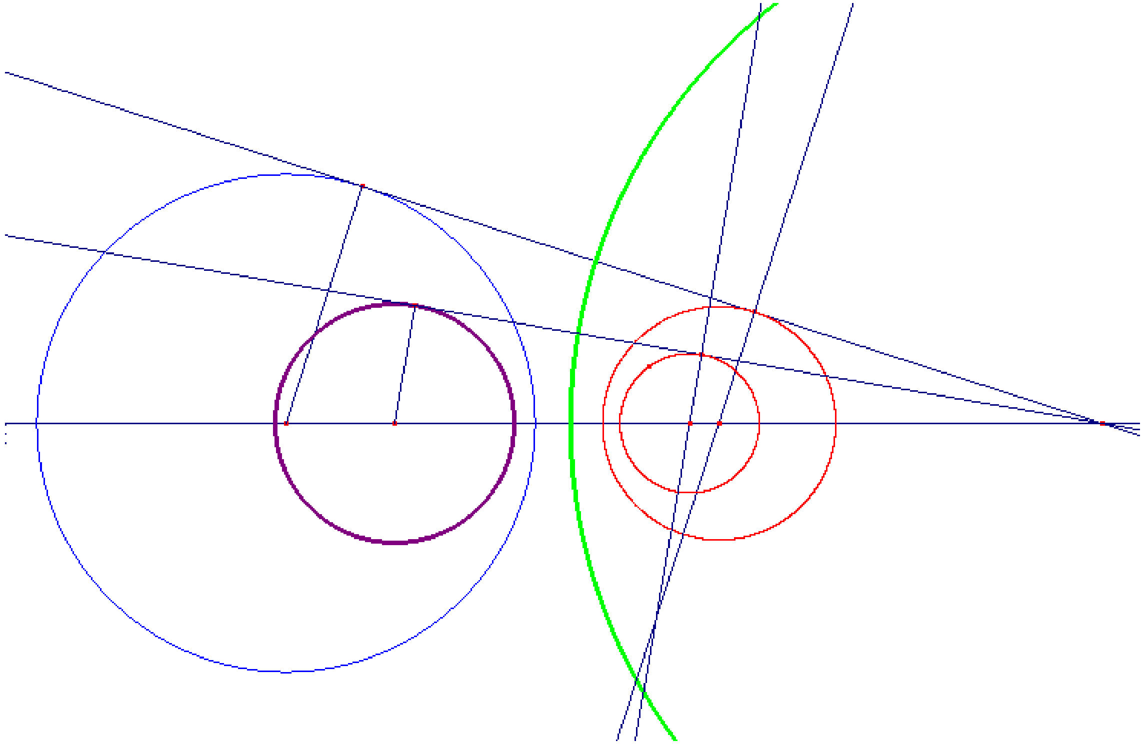
Mas como podemos ver as duas vermelha não são concêntricas. Vamos resolver isso: Primeiro traçamos a reta tangente à marrom que passa pelo centro da verde.



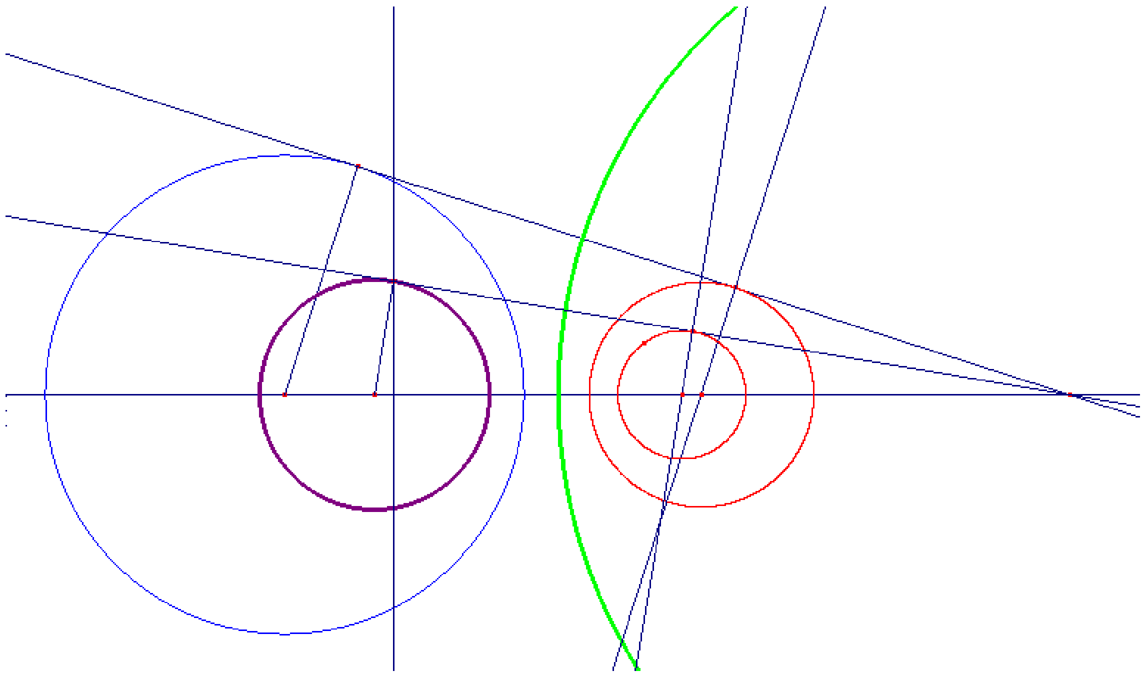
Como sabemos essa reta tangência a inversa também. Achemos agora a reta que passa pelo ponto de tangência.



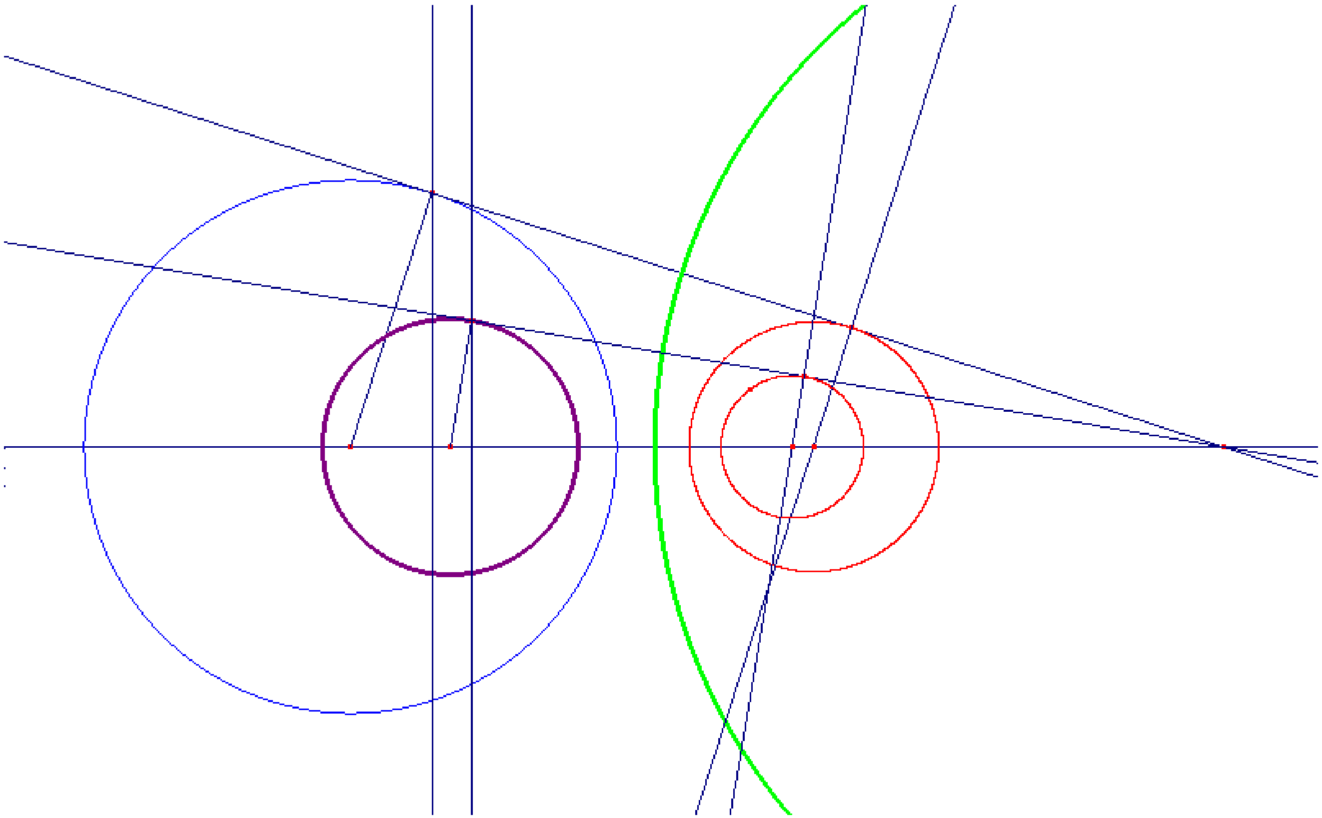
Construa o segmento que liga o centro da marrom com o ponto de tangência.



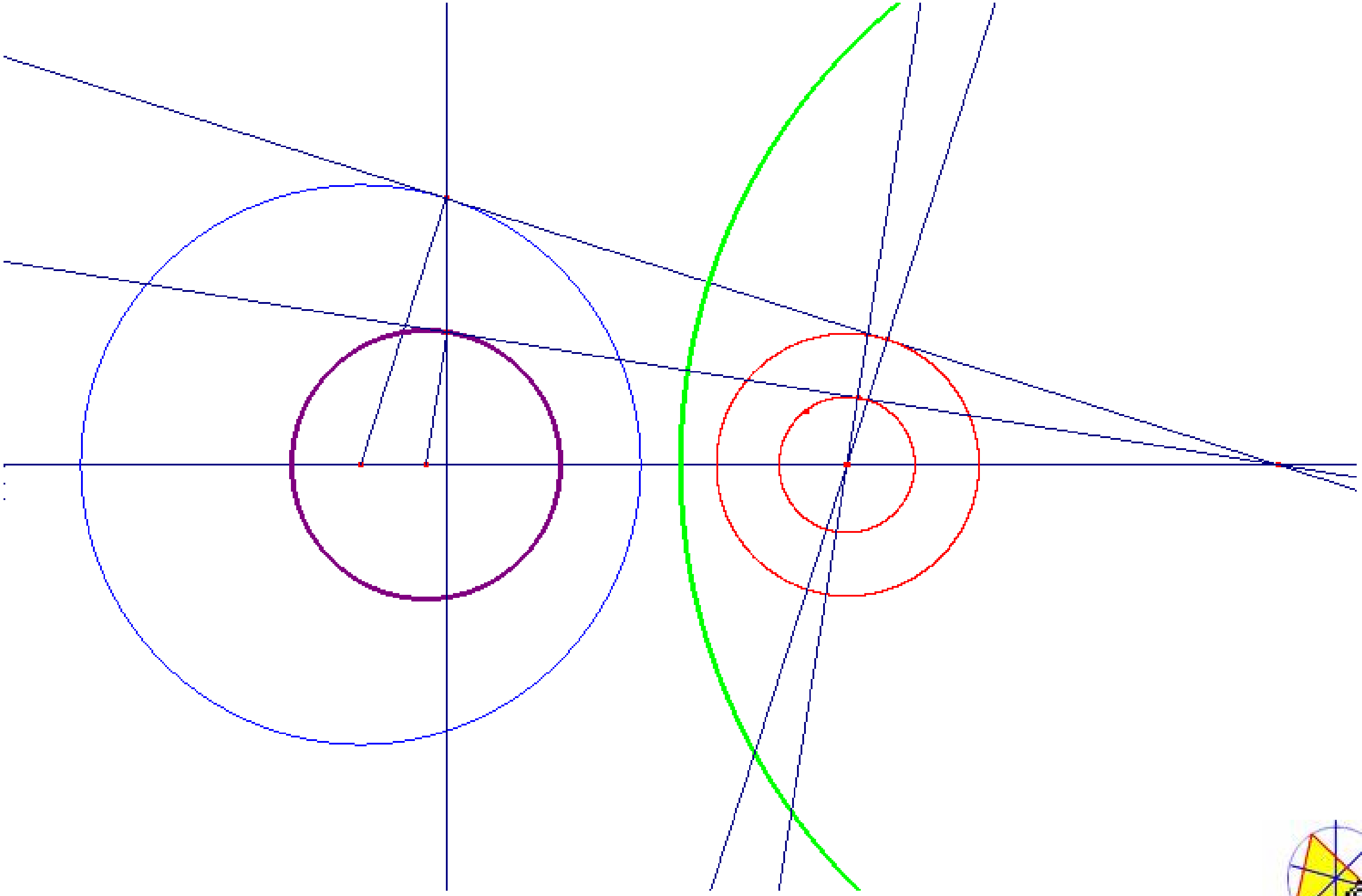
Vamos traçar agora a reta que passa pelo ponto de tangência da marrom e perpendicular à reta que passa pelos centros.

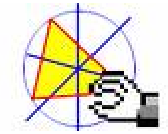


E fazemos o mesmo com a azul.



Por semelhança de triângulos podemos ver que quando essas duas retas estão sobrepostas os centros das inversas também estarão.

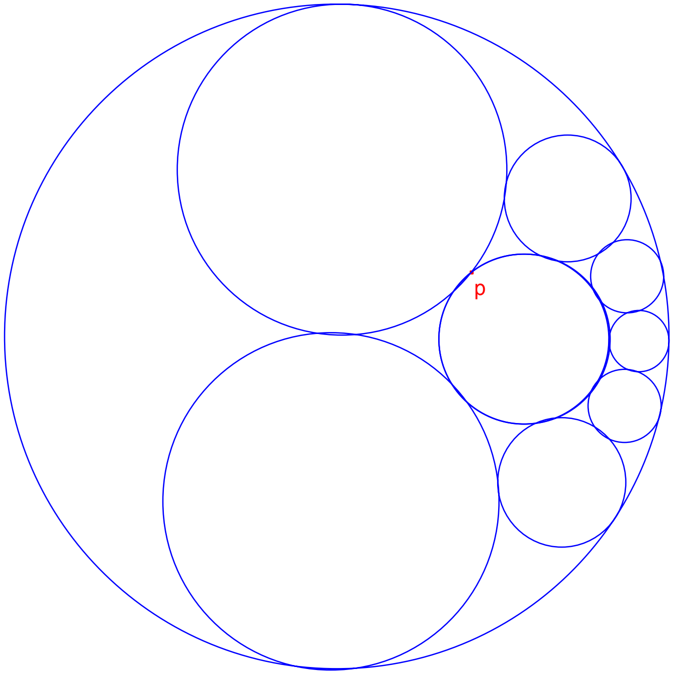




Com isso mostramos que é possível achar uma inversora que inverta duas circunferências não concêntricas em duas concêntricas.

Problema 4:

Dadas as circunferências C e c, de raios r e r', respectivamente, c interna a C mas não concêntricas, construir uma seqüência C1, C2, ..., Cn de n circunferências tangentes internamente a C e externamente a c de modo que duas circunferências contíguas quaisquer sejam tangentes entre si.

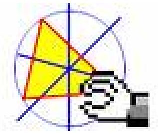


Estratégia para construção:

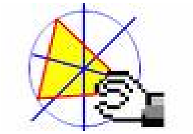
Pela teoria da inversão sabemos que ela é invariante, ou seja:

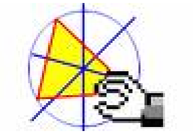
A inversão é *involutiva*, isto é, se P’ é o inverso de P, P é o inverso de P’. E ainda podemos dizer que (P’)’=P.

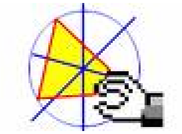
Então se mostramos que duas circunferência não concêntricas se invertem em duas circunferências concêntricas, o que acontece se invertermos duas circunferências concêntricas?



Construiremos duas circunferências concêntricas com sete circunferências tangente externamente a c e internamente a C, de modo que duas circunferências contíguas quaisquer sejam tangentes entre si.

 Passo 1

 Passo 2

 Passo 3

Considerações Finais

Quando o assunto é geometria ainda temos muito a acrescentar, visto que a maioria dos nosso alunos e/ou professores de matemática do ensino básico e médio têm certa dificuldade para com esse tema. Com o auxílio de softwares de geometria dinâmica entre outros, esperamos que essa lacuna seja preenchida o mais rápido possível, ajudando assim e todo o processo de ensino da matemática.

Com o uso dos softwares de geometria dinâmica espera-se que haja mais valorização dos cursos de Desenho Geométrico, que há muito tempo enfatiza apenas o desenvolvimento da visualização espacial. O ensino de Desenho Geométrico pode ser usado eficazmente para fomentar o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes através da prática de demonstrações.

A teoria de inversão pode ser usada para resolver alguns problemas tais como:

Círculos de Apolônio, mecanismos de Peaucellier (pistão), porismo de Poncelet (elipse), geometria hiperbólica, feixes de circunferências, etc.

Bibliografia

[1] Araújo, Ivanildo Basílio de. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e cabri-geometre**:Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2007.

[2] Araújo, Paulo.V. **Curso de Geometria**, Coleção Trajectos Ciência, Lisboa: Ed. Gradiva 1988.

[3] Boeyr, Carl B. **História da Matemática**:São Paulo, Ed. Edgard, 2ª ed.,1996.

[4] Lopes, Silvana M.R. **Complexidade em Geometria Euclidiana Plana**: Dissertação de Mestrado, PUC-RJ,2002.

[5] Lourenço, Marcos L.;Souza,Davi;Silva,Eurípedes A. da.**Inversões e Tangências no Plano**.

[6]Mafalda, Rovilson. **Resolução de problemas de tangências e aplicações à engenharia**: Dissertação de Doutorado em Engenharia, PUC-São Paulo, 2007.

[7] Oliveira, Celso dos Santos;Coutinho, Daniel Veloso. **Construção do logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática com o uso do cabri-geometre II**: Especialização em Ensino da Matemática,Universidade Estadual do Rio de Janeiro,2002.

[8] Spira, Michel. **Como transformar retas em círculos e vice e versa**:II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática:Universidade Federal da Bahia,2004.

[9] Tarrida, Augustí Reventós. **Geometria Inversiva**: Departamento de Matemática, Universiade Autónoma de Barcelona.

[10] Tavares, João Nuno: **Como desenhar uma linha reta com articulações planas**: Centro de Matemática da Universidade do Porto.

Prof. Anderson Dias Gonçalves

- Graduado em Matemática pelo Centro Universitário de Formiga
- Pós-Graduado em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras
- Pós-Graduado em Ensino da Matemática pelo Centro Universitário de Formiga
- Mestre em Matemática e Estatística pela Universidade Vale do Rio Verde

Atualmente atuo:

✓Instituto Nossa Senhora da Sagrado Coração – INSSC: Professor de Matemática Ensino Médio.

✓Instituto Superior de Ensino J. Andrade – Professor nos curso de Administração e Logística Empresarial e Coordenador do Curso de Extensão.

✓SENAC Minas – Consultoria Estatística

✓Fundação Dom Cabral – Consultoria Estatística: Professor pesquisador - convidado.

Muito obrigado pela atenção!